Københavns Universitet
Naturvidenskabelig kandidateksamen, sommeren 1997

MATEMATIK 3AG—95
(nyt pensum)

3 timers skriftlig prøve

I den første halvdel (90 minutter) er hjælpemidler ikke tilladt. I den sidste halvdel er alle sædvanlige hjælpemidler tilladt.

Besvarelserne af opgave 1 indsamles efter 90 minutter. Hvad der derefter besvares af opgave 1, medregnes ikke ved bedømmelsen.

Der er 4 opgaver:

Opgave 1 er en stilopgave, der tæller 50%.

Opgave 2, 3 og 4 er problemopgaver, der tæller henholdsvis 15%, 20% og 15%.

Der kan altså opnås i alt 100%.

Opgave 1 (50%).

Snitmultipliciteter.

(a) Angiv definitionerne af snitmultipliciteten i et affint punkt for to polynomier og af snitmultipliciteten i et projektivt punkt for to projektive kurver.

(b) Angiv de vigtige egenskaber ved snitmultipliciteter.

(c) Bevis additivitetsegenskaben ved snitmultipliciteter. Hvis der udnyttes en isomorfi, der medfører, at snitmultipliciteter kan udtrykkes som dimensioner af passende ringe, da ønskes denne isomorfi angivet (men ikke bevist). Hvis der udnyttes et lemma om primiske elementer i $\mathbb{C}[x_1, x_2]$, da ønskes dette formuleret (men ikke bevist). De enkelte dele af beviset bør fremstå klart.

Opgave 2 (15%).

I denne opgave betegner a et element i den kommutative ring R. For enhver R–modul M betragtes undermodulen $aM \overset{\text{def}}{=\!=} \{\, am \mid m \in M \,\}$ og restklassemodulen $\overline{M} \overset{\text{def}}{=\!=} M/aM$.

(a) Bevis, at enhver R–homomorfi $\varphi\colon M \to N$ inducerer en R–homomorfi $\overline{\varphi}\colon \overline{M} \to \overline{N}$ korrekt defineret ved $\overline{\varphi}\big([m]_{aM}\big) \overset{\text{def}}{=\!=} [\varphi(m)]_{aN}$ for $m \in M$.

Antag, at $M \xrightarrow{\varphi} N \xrightarrow{\psi} P \to 0$ er en exakt følge af R–homomorfier.

(b) Bevis, at den inducerede følge $\overline{M} \xrightarrow{\overline{\varphi}} \overline{N} \xrightarrow{\overline{\psi}} \overline{P} \to 0$ er exakt.

Antag yderligere, at der for alle $p \in P$ gælder: $ap = 0 \quad\Rightarrow\quad p = 0$.

(c) Bevis, at $\overline{\varphi}$ er injektiv, hvis φ er det.

Opgavesættet fortsættes på bagsiden

Opgave 3 (20%).

Betragt den projektive kurve $C \overset{\text{def}}{=\!=} (f^*)$ med $f \overset{\text{def}}{=\!=} x_1^2 - x_2^2 + x_1^4$ samt de projektive linier $L \overset{\text{def}}{=\!=} (x_1)$ og $M \overset{\text{def}}{=\!=} (x_1 - x_2)$. Betragt endvidere det projektive koordinatskift $\alpha\colon \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}} \to \mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$ givet ved $\alpha(x_1 : x_2 : x_3) \overset{\text{def}}{=\!=} (x_1 : x_3 : x_2)$.

(a) Bestem multipliciteten af C i begyndelsespunktet O og samtlige tangenter til C i O.

(b) Bestem kurven C_α, dens multiplicitet i O og dens tangenter i O.

(c) Bestem multipliciteten af C i punktet $U \overset{\text{def}}{=\!=} (0 : 1 : 0)$ og samtlige tangenter til C i U.

(d) Bestem snitcyklerne $C \bullet L$ og $C \bullet M$.

Opgave 4 (15%).

Antag, at C er en irreducibel kubisk kurve, at D er en kvadrik, og at P, Q og R er indbyrdes forskellige punkter i $\mathbb{P}^2_{\mathbb{C}}$, så P og Q er regulære på C, og så der for snitcyklen mellem C og D gælder:

$$C \bullet D = 3P + 2Q + R\,.$$

Betragt de næste to udsagn.

(i) Tangenten T_{PP} til C i P går gennem R.

(ii) Tangenten T_{QQ} til C i Q går gennem P.

(a) Bevis, at R er regulært på C.

(b) Angiv snitcyklen $C \bullet \mathrm{T}_{PP}$, når ($i$) er opfyldt, og $C \bullet \mathrm{T}_{QQ}$, når ($ii$) er opfyldt.

(c) Bevis, at (i) og (ii) er ensbetydende.

Med venlig hilsen, Hans–Bjørn Foxby