Københavns Universitet
Naturvidenskabelig kandidateksamen, sommeren 1996

MATEMATIK 3AG

3 timers skriftlig prøve

I den første halvdel (90 minutter) er hjælpemidler ikke tilladt. I den sidste halvdel er alle sædvanlige hjælpemidler tilladt.

Besvarelserne af opgave 1 indsamles efter 90 minutter. Hvad der derefter besvares af opgave 1, medregnes ikke ved bedømmelsen.

Der er 6 opgaver: én stilopgave à 50% (opgave 1) og fem problemopgaver à 12% (opgaverne 2–6). Der kan altså opnåes i alt 110%; en besvarelse anses for helt korrekt, hvis der er opnået 100%.

Opgave 1 (50%).

Angiv definitionerne af følgende begreber: annullator for element i modul; annullator for modul; primideal associeret til modul; støtte for modul. Angiv for modul M en almen relation mellem $\operatorname{Ass} M$ og $\operatorname{Supp} M$ samt relationer mellem disse to mængder og henholdsvis $\operatorname{Ass} N$, $\operatorname{Ass}(M/N)$ og $\operatorname{Supp} N$, $\operatorname{Supp}(M/N)$ for undermodul N af M [bevis ønskes ikke]. Bevis, at $\operatorname{Supp} M$ ikke er tom, når $M \neq 0$. Bevis, at $\operatorname{Ass} M$ ikke er tom, når R er noethersk og $M \neq 0$. Hvis der i det sidste bevis henvises til en påstand, om at en vis annullator er et primideal, da ønskes denne påstand også bevist.

Opgave 2 (12%).

Bestem for undermoduler H og K af modul M tre homomorfier ι, φ og π, så følgen $0 \to H \cap K \xrightarrow{\iota} H \xrightarrow{\varphi} M/K \xrightarrow{\pi} M/(H+K) \to 0$ er exakt.

Opgave 3 (12%).

Lad $\varphi\colon M \to N$ være en homomorfi, sæt $K = \operatorname{Ker}\varphi$ og $C = \operatorname{Coker}\varphi$, og lad $K \xrightarrow{\iota} M$ og $N \xrightarrow{\pi} C$ være henholdsvis inklusionsafbildningen og restklasseafbildningen. Lad endvidere $\mathfrak{p}$ være et primideal i R, og betragt homomorfien $\varphi_{\mathfrak{p}}\colon M_{\mathfrak{p}} \to N_{\mathfrak{p}}$.

(a) Begrund, at følgen $0 \to K_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{\iota_{\mathfrak{p}}} M_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{\varphi_{\mathfrak{p}}} N_{\mathfrak{p}} \xrightarrow{\pi_{\mathfrak{p}}} C_{\mathfrak{p}} \to 0$ er exakt.
(b) Bevis, at $\varphi_{\mathfrak{p}}$ er injektiv, hvis og kun hvis $\mathfrak{p}$ ikke tilhører støtten $\operatorname{Supp} K$.
(c) Bevis, at $\varphi_{\mathfrak{p}}$ er surjektiv, hvis og kun hvis $\mathfrak{p} \notin \operatorname{Supp} C$.

Opgavesættet fortsættes på bagsiden

Opgave 4 (12%).

Lad a være et element i ringen R, og betragt for R–modul M undermodulen $\underline{M} = \{ m \in M \mid am = 0 \}$. [At dette er en undermodul af M ønskes ikke uddybet.]

(a) Begrund, at der for enhver homomorfi $\varphi\colon M \to N$ gælder $\varphi(\underline{M}) \subseteq \underline{N}$.

Lad $\underline{\varphi}\colon \underline{M} \to \underline{N}$ betegne restriktionen.

(b) Bevis, at enhver exakt følge $0 \to K \xrightarrow{\kappa} L \xrightarrow{\lambda} P$ af R–moduler inducerer en exakt følge $0 \to \underline{K} \xrightarrow{\underline{\kappa}} \underline{L} \xrightarrow{\underline{\lambda}} \underline{P}$.

Opgave 5 (12%).

Antag, at $k = \mathbf{C}$, de komplekse tals legeme, og lad de plane kurver C og D være givet ved polynomierne henholdsvis $(X_1 + 1)^2 + X_2^2 - 1$ og $(X_1 + 2)^2 + 4X_2^2 - 4$.

(a) Bestem kurvernes multiplicitet i punktet $o = (0, 0)$ og deres tangenter i dette punkt. Angiv to andre punkter i snittet $C \cap D$, og kald dem p og q.
(b) Bestem snitcyklen $C.D$ (og dermed snitmultipliciteterne i o, p og q).
(c) Afgør, om kurverne har endelig skæring.

Opgave 6 (12%).

Antag, at p og q er glatte punkter på en irreducibel kubisk kurve C, at L er linien gennem p og q (og for $p = q$ betyder dette, at L er tangenten til C i $p = q$), at r er denne linies tredie skæringspunkt med C, at M er tangenten til C i r, at s er dennes tredie skæringspunkt med C, at N er linien gennem p og s (og for $p = s$ betyder dette, at N er tangenten til C i $p = s$), og at t er dennes tredie skæringspunkt med C. Antag endvidere, at grundlegemet k er algebraisk afsluttet.

(a) Bestem snitcyklerne $C.L^2N$ og $C.M$.
(b) Bevis, at der findes en kvadratisk kurve D, så $C.D = 3p + 2q + t$.
(c) Bevis, hvis D' er en kvadratisk kurve med $C.D' = 3p + 2q + t'$, da er $t' = t$.

Med venlig hilsen, Hans–Bjørn Foxby