Københavns Universitet
Naturvidenskabelig kandidateksamen, sommeren 1995

MATEMATIK 3AG

3 timers skriftlig prøve

I den første halvdel (90 minutter) er hjælpemidler ikke tilladt. I den sidste halvdel er alle sædvanlige hjælpemidler tilladt.

Besvarelserne af opgave 1 indsamles efter 90 minutter. Hvad der derefter besvares af opgave 1, medregnes ikke ved bedømmelsen.

Der er 7 opgaver: én stilopgave à 50% (opgave 1) og seks problemopgaver à 10% (opgaverne 2–7). Der kan altså opnåes i alt 110%; en besvarelse anses for helt korrekt, hvis der er opnået 100%.

Opgave 1 (50%).

Angiv definitionen af snitmultipliciteten for $F, G \in k[X_1, X_2]$ i punktet $p \in \mathbf{A}^2$, samt de vigtigste egenskaber ved dette begreb. Bevis additiviteten. Formulér Bezout's sætning [men bevis ønskes ikke].

Opgave 2 (10%).

Bestem for undermoduler H og K af modul M tre homomorfier ι, φ og π, så følgen $0 \to H \xrightarrow{\iota} H + K \xrightarrow{\varphi} M/H \cap K \xrightarrow{\pi} M/K \to 0$ er exakt.

Opgave 3 (10%).

Betragt $\mathbf{Z}$–modulen $\mathbf{Z}/(60)$.

(a) Bestem samtlige simple undermoduler af $\mathbf{Z}/(60)$ og disses annullatorer.
(b) Bestem længden af $\mathbf{Z}/(60)$.

Opgave 4 (10%).

Antag, at $L \xrightarrow{\lambda} M \xrightarrow{\mu} N$ er en exakt følge af moduler.

(a) Bevis, at der for $a \in \operatorname{Ann} L$ og $b \in \operatorname{Ann} N$ gælder $\mu(bM) = 0$ og $abM = 0$.
(b) Begrund, at $(\operatorname{Ann} L)(\operatorname{Ann} N) \subseteq \operatorname{Ann} M$.

Opgavesættet forsættes på bagsiden

Opgave 5 (10%).

Lad $\mathfrak{p}$ være et primideal i ringen R. Betragt for enhver R–modul M den kanoniske homomorfi $\rho_M : M \to M_{\mathfrak{p}}$, og sæt $\mathrm{C}(M) = \operatorname{Coker} \rho_M$. Bevis, at enhver exakt følge $0 \to M \to N \to P \to 0$ inducerer en exakt følge $\mathrm{C}(M) \to \mathrm{C}(N) \to \mathrm{C}(P) \to 0$.

Opgave 6 (10%).

Antag, at $k = \mathbf{C}$, de komplekse tals legeme, og lad de plane kurver C og D være givet ved polynomierne henholdsvis $(X_1^2 - X_2^2)^2 - (X_1^2 + X_2^2)^3$ og X_1X_2.

(a) Angiv kurvernes multiplicitet i punktet $o = (0,0)$, bestem deres tangenter i dette punkt, og bestem snitmultipliciteten $i_o(C_\bullet D)$.

(b) Angiv yderligere 4 punkter i snittet $C \cap D$, bestem snitcyklen $C_\bullet D$, og afgør, om kurverne har endelig skæring.

Opgave 7 (10%).

Antag, at p og q er glatte punkter på en irreducibel kubisk kurve C, at E er en kubisk kurve med $C_\bullet E = 8p + q$, at D er en kvadratisk kurve (dvs. et keglesnit) med $C_\bullet D = 5p + q$, og at grundlegemet k er algebraisk afsluttet.

(a) Bevis, at C har endelig skæring med såvel E som D.

(b) Bevis, at p er en flex på C ved at bevise, at der findes en linie T, så $C_\bullet T = 3p$, og begrund, at T er tangenten til C i p.

Med venlig hilsen, Hans–Bjørn Foxby