Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet sommeren 1994

Matematik 3AG

3 timers skriftlig prøve.

I den første halvdel (90 minutter) er hjælpemidler ikke tilladt. I den sidste halvdel af prøven er alle sædvanlige hjælpemidler tilladt.

Besvarelserne af opgave 1 indsamles efter 90 minutter. Hvad der derefter besvares af opgave 1 medregnes ikke ved bedømmelsen.

Opgave 1 (50%).

I forbindelse med moduler af endelig længde spiller simple moduler en vigtig rolle. Angiv nogle karakteriseringer af simple moduler, og bevis ækvivalensen af disse karakteriseringer. Vis formlen $\operatorname{long} M = \operatorname{long} N + \operatorname{long} M/N$ for en undermodul N af en given modul M.

Opgave 2 (10%).

Hvilken længde har $\mathbf{Z}$-modulen $M := \mathbf{Z}/24\mathbf{Z}$? Angiv i M en uforfinelig filtration $(0) = F_0 \subseteq F_1 \subseteq \cdots \subseteq F_n = M$.

Opgave 3 (10%).

Lad M være en endelig kommutativ gruppe. Vis for et primtal p, at hovedidealet (p) er associeret til $\mathbf{Z}$-modulen M, hvis og kun hvis M indeholder et element af orden p. Vis, at for hvert primtal p, der går op i M's orden, findes et element af orden p i M.

Opgave 4 (10%).

I $\mathbf{Z}$-modulen $M := \mathbf{Z}/18\mathbf{Z}$ er multiplikation med 12 sammensat af multiplikation med 4 og multiplikation med 3. Angiv den tilhørende exakte kerne-kokerne følge.

Opgave 5 (10%).

Over legemet $k = \mathbf{C}$ af komplexe tal betragtes den plane kurve C bestemt ved ligningen $Y^2 = X^3$ og den plane kurve D bestemt ved ligningen $Y^3 = X^2$. Hvilke multipliciteter har C og D i punktet $o = (0,0)$? Beregn snitmultipliciteten $i_o(C.D)$. Bestem snitmultipliciteten $i_p(C.D)$ for alle punkter p i $C \cap D$.

Opgave 6 (10%).

Legemet $\mathbf{C}(t)$ er som bekendt brøklegemet for polynomiumsringen $\mathbf{C}[t]$. Betragt i $\mathbf{C}(t)$ elementerne $x := (1-t^2)/(1+t^2)$ og $y := 2t/(1+t^2)$. Vis, at $x^2 + y^2 = 1$. Vis, at der findes en isomorfi $\mathbf{C}[X,Y]/(X^2+Y^2-1) \xrightarrow{\sim} \mathbf{C}[x,y]$.