Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet sommeren 1993

Matematik 3AG

3 timers skriftlig prøve.

I den første halvdel (90 minutter) er hjælpemidler ikke tilladt. I den sidste halvdel af prøven er alle sædvanlige hjælpemidler tilladt.

Besvarelserne af opgave 1 indsamles efter 90 minutter. Hvad der derefter besvares af opgave 1 medregnes ikke ved bedømmelsen.

Opgave 1 (50%).

Formuler og bevis Filtrationssætningen for endeligt frembragte moduler over en given noethersk ring. [Beviset vil formodentlig benytte en række resultater om associerede primidealer. Disse resultater må fremgå klart, men de ønskes ikke bevist.]

Opgave 2 (10%).

Lad M_1 og M_2 være endeligt frembragte moduler over en noethersk ring R. Vis formlen $\operatorname{Ass}(M_1 \oplus M_2) = \operatorname{Ass}(M_1) \cup \operatorname{Ass}(M_2)$.

Opgave 3 (10%).

Betragt kvotienten $M := \mathbf{Z}/18\mathbf{Z}$ som $\mathbf{Z}$-modul. Angiv annullatoren for M. Angiv videre mængden $\operatorname{Supp} M$. Angiv endelig for hvert primideal $\mathfrak{p}$ i $\operatorname{Ass} M$ et element $x \in M$ således at $\mathfrak{p} = \operatorname{Ann}(x)$.

Opgave 4 (10%).

Vis, at der findes en exakt følge,

$$0 \to \mathbf{Z} \xrightarrow{6} \mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/18\mathbf{Z} \xrightarrow{6} \mathbf{Z}/18\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/6\mathbf{Z} \to 0.$$

Opgave 5 (10%).

Over legemet $k = \mathbf{C}$ af komplexe tal betragtes den plane kurve C bestemt ved ligningen $Y^3 = X^4$. Hvilken multiplicitet har C i punktet $o = (0,0)$? Betragt videre kurven D bestemt ved $Y^2 = X^3$. Beregn snitmultipliciteten $i_o(C.D)$.

Opgave 6 (10%).

Betragt i polynomiumsringen $\mathbf{C}[t]$ polynomierne $x := t^3$ og $y := t^4$. Bestem en isomorfi mellem koordinatringen $\Gamma(C)$, hvor C er kurven i opgave 5, og delalgebraen $\mathbf{C}[x, y]$ af $\mathbf{C}[t]$.