Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet sommeren 1992

Matematik 3AG

3 timers skriftlig prøve

I den første halvdel (90 minutter) er hjælpemidler ikke tilladt. I den sidste halvdel af prøven er alle sædvanlige hjælpemidler tilladt.

Besvarelserne af opgave 1 indsamles efter 90 minutter. Hvad der derefter besvares af opgave 1 medregnes ikke ved bedømmelsen.

Opgave 1 (50%)

I Hilbert's basissætning indgår begrebet 'en noethersk ring'. Forklar dette begreb. Formuler Hilbert's basissætning. Gengiv nogle hovedtræk i beviset for basissætningen. [I beviset benyttes naturligt nogle egenskaber ved moduler over noetherske ringe. Det er ikke nødvendigt at bevise disse egenskaber, men de benyttede egenskaber skal fremtræde klart i besvarelsen.]

Opgave 2 (10%)

Lad M være en modul over en ring R. Et element g i R siges at være *regulært på* M, hvis multiplikation med g på M, dvs $x \mapsto gx$ for $x \in M$, er en injektiv afbildning. Vis, at hvis g er regulært på M og h er endnu et element i R, så findes en exakt følge,

$$0 \to M/hM \to M/ghM \to M/gM \to 0.$$

Antag nu, at R er noethersk. Vis, at et element $g \in R$ er regulært på M, hvis og kun hvis g ikke tilhører noget associeret primideal for M.

Opgave 3 (10%)

Lad R være en faktoriel ring, og lad f og g være elementer forskellige fra 0 i R. Vis, at elementet g er regulært på kvotienten R/fR, hvis og kun hvis f og g er primiske.

Opgave 4 (10%)

Vis, at der findes en exakt følge,

$$\cdots \to \mathbf{Z}/6\mathbf{Z} \xrightarrow{2} \mathbf{Z}/6\mathbf{Z} \xrightarrow{3} \mathbf{Z}/6\mathbf{Z} \xrightarrow{2} \mathbf{Z}/6\mathbf{Z} \xrightarrow{3} \mathbf{Z}/6\mathbf{Z} \xrightarrow{2} \mathbf{Z}/6\mathbf{Z} \to \mathbf{Z}/2\mathbf{Z} \to 0.$$

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 5 (10%)

Lad k være legemet $\mathbf{C}$ af komplexe tal. Betragt den plane kurve C med ligningen $Y^2 = X^2(X+1)$. Hvilken multiplicitet har C i punktet $o = (0,0)$? Lad p være et rationalt punkt, hvori C er glat. Vis, at tangenten til C i p ikke kan gå igennem o.

Opgave 6 (10%)

Betragt i polynomiumsringen $\mathbf{C}[t]$ polynomierne $x := t^2 - 1$ og $y := t^3 - t$. Bestem en isomorfi mellem koordinatringen $\Gamma(C)$, hvor C er kurven i opgave 5, og delalgebraen $\mathbf{C}[x, y]$ af $\mathbf{C}[t]$.