Københavns Universitet
Naturvidenskabelig kandidateksamen, vinteren 1990-91

Matematik 3 AG

3 timers skriftlig prøve

De første 2 timer er uden hjælpemidler. I den sidste time må alle sædvanlige hjælpemidler benyttes.
Besvarelserne af opgave 1 indsamles efter 2 timer. Hvad der derefter besvares af opgave 1 medregnes ikke.

Opgave 1 (vægt 60%)

Gør rede for begreberne noethersk- og artinsk modul.

Definér hvad det vil sige, at en kommutativ ring er noethersk.

Begrebet primideal ønskes defineret og en sætning af I.S. Cohen, som drejer sig om, hvornår en kommutativ ring er noethersk, ønskes formuleret og bevist.

Endelig ønskes formuleret og bevist en sætning om hvornår noetherske ringe er artinske.

Vis at $\mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$ har endelig længde som $\mathbb{Z}$-modul og angiv en kompositionskæde. ($\mathbb{Z}$ betegner ringen af hele tal).

Opgave 2 (vægt 45%)

Lad R betegne ringen $\mathbb{C}[X, Y, Z]$. Med andre ord, er R altså polynomiumsringen i 3 variable X, Y, Z over de komplekse tal, $\mathbb{C}$.

For $a \in \mathbb{C}$ lader vi I_a betegne idealet frembragt af

$$(a-1)X^2 \,,\ Y^2 - a^2Z^2 \ \text{ og } Y - Z \,.$$

R_a betegner faktorringen R/I_a.
x, y, z betegner billederne af henholdsvis X, Y og Z ved den kanoniske homomorfi fra R på R_a.

Først betragtes R_0. (y) betegner idealet frembragt af y.

1. Undersøg, om R_0 er en artinsk ring.
2. Vis, at $y \otimes y = 0$ i $(y) \otimes_{R_0} R_0$.
3. Vis, at $y \otimes y \neq 0$ i $(y) \otimes_{R_0} (y)$.
4. Undersøg, om (y) er en flad R_0-modul.

Dernæst betragtes R_1.

5. Vis, at $R_1 \simeq \mathbb{C}[Y, Z]/(Y-Z)[X]$. Med andre ord er R_1 altså isomorf med polynomiumsringen i 1 variabel over ringen $\mathbb{C}[Y, Z]/(Y-Z)$.
6. Undersøg, om R_1 er injektiv som R_1-modul.