Københavns Universitet
Naturvidenskabelig embedseksamen, vinteren 1989-90

Matematik 3 AG

3 timers skriftlig prøve.

De første 2 timer uden hjælpemidler. Den sidste time må alle sædvanlige hjælpemidler benyttes.

Besvarelserne af opgave 1 indsamles efter 2 timer. Hvad der derefter besvares af opgave 1 medregnes ikke.

Opgave 1 (vægt 60%)

Gør rede for begreberne tensorprodukt af 2 moduler og 2 homomorfier. (Påstandene kan anføres uden bevis.)

Definer hvad det vil sige, at en modul M er flad.

Hovedsætning 6.11, som omhandler et kriterium for fladhed, ønskes formuleret og bevist. (Beviset ønskes udformet således, at hovedtrækkene i beviset klart fremgår).

Det ønskes bevist, at enhver torsionsfri $\mathbb{Z}$-modul er flad.

Opgave 2 (vægt 45%)

Vi lader Q betegne legemet af rationale tal og $Q[X]$ polynomiumsringen over Q.

Lad I være idealet i $Q[X]$ frembragt af polynomiet $(1+X)^3$.

i) Er $Q[X]/I$ en artinsk ring ?

ii) Find Krull $\dim Q[X]$. (se evt. kap. 8.)

Lad S betegne den multiplikativt afsluttede delmængde af $Q[X]$ frembragt af potenser af X, altså $S = \{X^n \mid n \in \mathbb{N}_0\}$.

Brøkringen af $Q[X]$ med hensyn til S betegnes R, d.v.s. $R = Q[X]_S$.

iii) Afgør om $(1+X)/1$ er invertibel (en enhed) i R.

Vi opfatter R, som $Q[X]$-modul på naturlig måde.

iv) Det ønskes afgjort om R er a) fri b) projektiv c) flad d) injektiv som $Q[X]$-modul.

Opgave 2 fortsættes på side 2

Københavns Universitet
Naturvidenskabelig embedseksamen, vinteren 1989-90
Matematik 3 AG

(Vink. For at besvare b) kan man eventuelt anvende Sætning 3.16 Korollar).

v) Afgør om R/I_S er en artinsk ring.

vi) Det ønskes undersøgt om $Q[X]/I$ er flad som $Q[X]/I^2$ -modul.