Københavns Universitet
Naturvidenskabelig embedseksamen, vinteren 1988/89

Matematik 3AG

3 timers skriftlig prøve.
De første 2 timer uden hjælpemidler. Den sidste time må alle sædvanlige hjælpemidler benyttes.
Besvarelserne af opgave 1 indsamles efter 2 timer. Hvad der derefter besvares af opgave 1 medregnes ikke.

Opgave 1 (vægt 60%)

Gør rede for begrebet injektiv A-modul, hvor A er en ring.
Formuler Baers kriterie.
Giv et bevis for, at enhver A-modul kan indlejres i en injektiv A-modul. (Hovedtrækkene i beviset bør træde klart frem og detaljer bør kun medtages i det omfang tiden tillader. Hvis resultater fra andre dele af stoffet benyttes, bør dette klart fremgå).

Opgave 2 (Vægt 20%)

Betragt ringen $R = \mathbf{C}[X, Y]$, hvor $\mathbf{C}$ betegner de komplekse tal. R er altså polynomiumsringen i to variable over de komplekse tal.

Lad L være undermodulen af R-modulen $R \oplus R$ frembragt af elementet (x, x^2), dvs. $L = \{(rx, rx^2) \mid r \in R\}$.

1. Er $M = R \oplus R / L$ en torsionsfri R-modul?
2. Er M en projektiv R-modul?
3. Er $0 \hookrightarrow L \overset{i}{\hookrightarrow} R \oplus R \overset{K}{\rightarrow} M \rightarrow 0$ split eksakt?
   (i betegner inklusionsafbildningen af L i $R \oplus R$ og K den kanoniske homomorfi fra $R \oplus R$ på M).
4. Er L en projektiv R-modul?

Svarene på spørgsmålene 1 til 4 ønskes givet med begrundelse.

Opgave 3 (Vægt 25%)

Lad $R = \mathbf{Z}[X, Y]$, hvor $\mathbf{Z}$ betegner ringen af hele tal. R er altså polynomiumsringen i to variable over de hele tal. Lad M være idealet frembragt af $2, X$ og Y.

Vis, at M er et maksimalt ideal og find rank (M).

Opgave 3 fortsættes på side 2

Lad dernæst I være idealet frembragt af $8, X^2$ og Y^2 og lad A betegne faktorringen R/I.

Find primradikalet af A, rad (A), og undersøg om A er en artinsk ring.

Er idealet frembragt af 4's restklasse modulo I fladt som R/I-modul?