Københavns Universitet
Naturvidenskabelig embedseksamen, vinteren 1987-1988

Matematik 3 AG

3 timers skriftlig prøve

De første 2 timer uden hjælpemidler. Den sidste time må alle sædvanlige hjælpemidler benyttes.

Besvarelserne af opgave 1 indsamles efter 2 timer. Hvad der derefter besvares af opgave 1 medregnes ikke.

Opgave 1 (Vægt 55%)

Gør rede for begreberne primideal og højde af primideal i en kommutativ ring.

Formuler og bevis Krull's hovedideal sætning. (Det ønskes ikke bevist, at hvis R er et integritetsområde og u, y to elementer forskellige fra nul, som opfylder, at $(u, y)/(u^2)$ har endelig længde og $tu^2 \in (y)$ netop når $tu \in (y)$, da er $(u, y) = (u^2, y)$).

Opgave 2 (Vægt 50%)

Lad K være et kommutativt legeme og lad R betegne ringen, $K[X]/(X^5)$, idet (X^5) betegner idealet frembragt af X^5 i polyniumsringen i én variabel over K. Vi lader κ betegne den kanoniske homomorfi fra $K[X]$ på R, og $\kappa(X) = x$.

a Vis, at R er en artinsk ring.
b Find primradikalet og Jacobsonradikalet for R.
c Gør rede for, at $(0), (x), (x^2), (x^3)$ og (x^4) er samtlig ægte idealer i R.
d Undersøg om R er en injektiv R-modul.
e Vis, at der ved $(r_1 x, r_2 x) \to r_1 r_2 x$ defineres en R-bilineær afbildning fra $(x) \times (x)$ til R.
f Er (x) en flad R-modul?
g Er (X) en flad $K[X]$-modul?
h For $K = \mathbf{C}$ (de komplekse tal) ønskes en beskrivelse af de topologiske rum Spec $(\mathbf{C}[X])$, Spec (R) og en beskrivelse af afbildningen ${}^a\kappa$: Spec $(R) \to$ Spec $(C[X])$