Københavns Universitet
Naturvidenskabelig embedseksamen

MATEMATIK 3 AG

Vinteren 1985/86

3 timers skriftlig prøve

De første 2 timer uden hjælpemidler. Den sidste time med hjælpemidler. Besvarelsen af opgave 1 indsamles efter 2 timer. Hvad der derefter besvares af opgave 1 medregnes ikke.

Opgave 1 (Vægt 60%)

Gør rede for, hvad det vil sige, at en Λ-modul M er Λ-injektiv. Formuler Baer's kriterie.

Giv enten et bevis for, at enhver Λ-modul kan indlejres i en injektiv modul eller bevis, at enhver modul har et injektivt hylster.

(Hovedtrækkene i beviset bør træde klart frem og detaljer bør kun medtages i det omfang tiden tillader, hvis resultater fra andre dele af stoffet benyttes bør dette klart fremgå.)

Opgave 2 (Vægt 20%)

Betragt ringen $\mathbb{C}[X,Y]$ (polynomiumsringen i 2 variable over de komplekse tal). I denne ring betragtes idealet I frembragt af X^2 og XY og vi lader R betegne $\mathbb{C}[X,Y]/I$.

a) Find primradikalet $\mathrm{rad}(R)$.

b) Find strukturen af $R/\mathrm{rad}(R)$.

c) Beskriv det topologiske rum $\mathrm{Spec}(R)$. (Idet $\mathrm{Spec}(R)$ tænkes udstyret med Zariski topologien).

d) Er R en artinsk ring ?

Opgavesættet fortsættes

Opgave 3 (Vægt 35%)

Betragt polynomiumsringen $Z[x]$, hvor Z betegner ringen af hele tal. I denne ring betragtes idealet I frembragt af 4 og x^2 og vi lader R betegne faktorringen $Z[x]/I$. Med $\overline{a}$ betegnes billedet af et element $a \in Z[x]$ ved den kanoniske homomorfi fra $Z[x]$ til R .

Lad A være idealet i R frembragt af $(\overline{2},\overline{x})$.

Vis, at $\overline{2} \otimes \overline{x} - \overline{x} \otimes \overline{2} = 0$ i $A \otimes R$.

Vis, at der ved

$$(\overline{r}_1\overline{2} + \overline{s}_1\overline{x}\,,\ \overline{r}_2\overline{2} + \overline{s}_2\overline{x}) \to \overline{2r_1}\,\overline{s}_2\overline{x}$$

defineres en R bilineær afbildning fra $A \times A$ til R .

Vis, at $\overline{2} \otimes \overline{x} - \overline{x} \otimes \overline{2} \neq 0$ i $A \times A$.

Vis, at idealet frembragt af 2 og x i $Z[x]$ ikke er fladt.