Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet sommeren 2001

Matematik 3AG

3 timers skriftlig prøve.

I den første halvdel (90 minutter) er hjælpemidler *ikke* tilladt. I den sidste halvdel er alle sædvanlige hjælpemidler tilladt.

Besvarelsen af Opgave 1 indsamles efter 90 minutter. Hvad der derefter besvares af Opgave 1, medregnes ikke ved bedømmelsen.

Der er 4 opgaver:

Opgave 1 er en stilopgave, der tæller 50%. Opgave 2, 3 og 4 er problemopgaver, der tæller henholdsvis 15%, 20% og 15%.

Der kan altså opnås i alt 100%.

Opgave 1 (50%)

Snitmultipliciteter

(a) Angiv definitionerne af snitmultipliciteten i et affint punkt for to polynomier og af snitmultipliciteten i et projektivt punkt for to projektive kurver.

(b) Angiv de vigtige egenskaber ved snitmultipliciteter.

(c) Bevis additivitetsegenskaben ved snitmultipliciteter. Hvis der udnyttes en isomorfi, der medfører, at snitmultipliciteter kan udtrykkes som dimensioner af passende ringe, da ønskes denne isomorfi angivet (men ikke bevist). Hvis der udnyttes et lemma om primiske elementer i $\mathbb{C}[x_1, x_2]$, da ønskes dette formuleret (men ikke bevist). De enkelte dele af beviset bør fremstå klart.

Opgave 2 (15%)

I denne opgave betragtes de projektive kurver

$$C = (X_1^2 + X_2^2 - 2(X_1 + X_2)X_3)$$

og

$$D = (X_1^2 - X_2^2).$$

(a) Begrund, at $U = (2 : 2 : 1)$ ligger på C og bestem samtlige tangenter til C i U.

(b) Begrund, at $\mathrm{m}_U(C_\bullet D) = \mathrm{m}_U(C)\mathrm{m}_U(D)$ og bestem den eksakte værdi af $\mathrm{m}_U(C_\bullet D)$.

(c) Bestem $C_\bullet D$.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 3 (20%)

I denne opgave betragtes den kubiske kurve

$$C = (X_1^3 - 3X_1X_3^2 - X_2X_3^2).$$

Det må uden bevis benyttes, at C er irreducibel.

(a) Skitsér den affine (reelle) del af C.
Begrund, at der er netop ét ikke-regulært punkt på C. Dette punkt kaldes U. Bestem U.

Lad $C^\circ = C \setminus \{U\}$ og betragt punkterne

$$\begin{aligned} P &= (-1 : 2 : 1), \\ P' &= (\ \ 1 : -2 : 1) \text{ og} \\ Q &= (\ \ 2 : 2 : 1) \end{aligned}$$

på C°. Betragt additionen $* : C^\circ \times C^\circ$ med nul-element $N = (0 : 0 : 1)$.

Bestem følgende punkter

(b) $P * Q$.

(c) $P * P'$.

(d) $P' * P'$.

Opgave 4 (15%)

I denne opgave er R en ikke-triviel, kommutativ ring.

Lad M være en R-modul, lad x være et element i $M \setminus \{0\}$, og sæt $\mathcal{P} = \operatorname{Ann}_R(x)$ og $N = Rx$.

(a) Bestem R-homomorfier φ og ψ, så der er exakte følger

$$0 \longrightarrow N \xrightarrow{\varphi} M \quad \text{og} \quad 0 \longrightarrow R/\mathcal{P} \xrightarrow{\psi} N \longrightarrow 0.$$

(b) Antag, at $\mathcal{P}$ er et primideal og betragt lokaliseringerne $N_{\mathcal{P}}$ og $M_{\mathcal{P}}$ (altså $S^{-1}N$ og $S^{-1}M$ med $S = R \setminus \mathcal{P}$). Bevis, at $N_{\mathcal{P}} \neq 0$ og $M_{\mathcal{P}} \neq 0$.

(c) Antag nu, at $\mathcal{Q} = \operatorname{Ann}_R(y)$, $y \in M \setminus \{0\}$, er maksimalt i mængden

$$X = \{ \operatorname{Ann}_R(z) \mid z \in M \setminus \{0\} \};$$

altså, at der gælder:

$$\Big(\mathcal{Q} \subseteq \operatorname{Ann}_R(z)\,,\ z \in M \setminus \{0\} \Big) \Rightarrow \mathcal{Q} = \operatorname{Ann}_R(z).$$

Bevis, at $\mathcal{Q}$ er et primideal i R.