Københavns Universitet
Naturvidenskabelig embedseksamen sommeren 1974

1. del. Matematik 321.

Opgaver til besvarelse i 4 timer uden hjælpemidler.

Opgave 1. (omtrentlig vægt 65%).

Konstruktion af en ikke-euklidisk geometri.

Det væsentlige bør træde klart frem. Enkeltheder medtages i det omfang, tiden tillader.

Opgave 2. (omtrentlig vægt 35%).

På side 2 og 3 er defineret et formelt system, som tillader behandling af mængder med 1 kompositionsregel +. Iøvrigt afviger systemet kun fra det først i kurset benyttede ved at slutningsreglerne for $\forall$ og $\exists$ er de kraftige, der tillader substitution.

På side 4 er givet et aksiomsystem og et bevis, i hvilket der et enkelt sted er anvendt en afledet slutningsregel. Gør for hvert udsagn i beviset rede for, om det er et aksiom, eller om det følger af forgængerne, og da ved hvilken slutningsregel. Begrund den anvendte afledede slutningsregel.

Anton Jensen Børge Jessen

Givet er en fri semigruppe $\mathcal{S}$ med frembringere

$$\neg, \wedge, \vee, \Rightarrow, \forall, \exists, =, +, (,), [\![,]\!], \underbrace{x, y, z, x_1, y_1, z_1, \ldots}_{\text{numerabelt mange variable}}$$

Vi anvender multiplikativ skrivemåde for elementerne i $\mathcal{S}$, og da en semigruppe er associativ, kan parenteser udelades.

Mængden af <u>termer</u> $\mathcal{T}$ er den mindste delmængde af $\mathcal{S}$, som indeholder samtlige variable og opfylder

$$(a+b) \in \mathcal{T}, \text{ hvis } a \in \mathcal{T} \text{ og } b \in \mathcal{T}.$$

Mængden af <u>udsagn</u> $\mathcal{U}$ er den mindste delmængde af $\mathcal{S}$, som indeholder alle symbolstrenge af formen

$$a = b,$$

hvor a og b er termer, og desuden opfylder

$$\begin{aligned}
\neg A \in \mathcal{U} &, \text{ hvis } A \in \mathcal{U} \\
(A \wedge B) \in \mathcal{U} &, \text{ hvis } A, B \in \mathcal{U} \\
(A \vee B) \in \mathcal{U} &, \text{ ——— " ——— } \\
(A \Rightarrow B) \in \mathcal{U} &, \text{ ——— " ——— } \\
\forall v A \in \mathcal{U} &, \text{ hvis } v \text{ er en variabel og } A \in \mathcal{U} \\
\exists v A \in \mathcal{U} &, \text{ ——— " ———}
\end{aligned}$$

(I de sidste udsagn kaldes variablen v <u>bundet</u>. Ikke-bundne variable kaldes <u>fri</u>).

Mængden af beviser $\mathcal{B}$ er den mindste delmængde af $\mathcal{S}$, som indeholder alle udsagn og opfylder

$$\Sigma_1 \Sigma_2 \in \mathcal{B}, \text{ hvis } \Sigma_1, \Sigma_2 \in \mathcal{B}$$

$$[\![A \Sigma]\!] \in \mathcal{B}, \text{ hvis } A \in \mathcal{U} \text{ og } \Sigma \in \mathcal{B}.$$

$[\![$ læses som „<u>antag</u>", og $]\!]$ læses som „<u>slut på antagelse</u>".
Et bevis af formen $[\![A \Sigma]\!]$ kaldes et lemma, og A kaldes antagelsen.

Hvis et bevis Σ har formen

$$\ldots A \ldots B \ldots ,$$

hvor A er et udsagn eller et lemma, og B er et udsagn, så kaldes A en <u>forgænger</u> for B, såfremt B er del af ethvert lemma hvoraf A er del. D.v.s. at et $[\![$ før A enten afsluttes før A eller efter B.

Et udsagn kaldes <u>bevist</u> i et bevis Σ, såfremt det har formen

$\exists v\, v=a$, hvor v er en variabel, der <u>ikke</u> findes i termen a, eller følger af sine forgængere ved en af følgende slutningsregler.

① $A \vdash A$

② $a=b \vdash b=a$

③ $a=b, b=c \vdash a=c$

④ $a=b, c=d \vdash (a+c)=(b+d)$

⑤ $[\![\neg A \ldots A]\!] \vdash A$

⑥ $A, \neg A \vdash B$

⑦ $A, B \vdash A \wedge B$

⑧ $A \wedge B \vdash A$ og $A \wedge B \vdash B$

⑨ $A \vdash A \vee B$ og $B \vdash A \vee B$

⑩ $A \vee B, [\![A \ldots C]\!], [\![B \ldots C]\!] \vdash C$

⑪ $[\![A \ldots B]\!] \vdash A \Rightarrow B$

⑫ $A, A \Rightarrow B \vdash B$

⑬ $A^v_u \vdash \forall v\, A$ *)

⑭ $\forall v\, A \vdash A^v_a$

⑮ $A^v_a \vdash \exists v\, A$

⑯ $\exists v\, A, [\![A^v_u \ldots C]\!] \vdash C$ **)

A^v_a er det udsagn, der fremkommer ved at substituere termen a i stedet for variablen v i udsagnet A. *) betyder at variablen u skal være vilkårlig, d.v.s. ikke fri i A eller nogen uberist forgænger for A^v_u, og **) betyder at u ikke må være fri i C eller nogen uberist forgænger bortset fra A^v_u.

Et aksiomsystem er en mængde af udsagn. Et bevis af formen ΣA, hvor A er et udsagn, kaldes et <u>bevis for at A følger af aksiomsystemet</u>, såfremt alle uberiste udsagn i ΣA enten tilhører aksiomsystemet eller er antagelser.

Aksiomsystemet

1 er en konstant, d.v.s. en fri variabel i aksiomsystemet.
Der er tre aksiomer

$$\forall x \neg (x+1) = 1$$

$$\forall x \forall y \; (x+1)=(y+1) \Rightarrow x=y$$

$$\forall x \forall y \; (x+(y+1)) = ((x+y)+1)$$

og aksiomskemaet (induktionsaksiomskemaet)

$$[((A_1^x \wedge \forall x(A \Rightarrow A_{x+1}^x)) \Rightarrow \forall x A)]$$

hvor A er et vilkårlig udsagn, og parentesparret [ ] betyder, at eventuelle frie variable skal bindes med alkvantorer.

Beviset.

1° $((\neg(1+1)=1 \wedge \forall x(\neg(x+x)=1 \Rightarrow \neg((x+1)+(x+1))=1)) \Rightarrow \forall x \neg(x+x)=1)$

2° $\forall x \neg(x+1)=1$

3° $\neg(1+1)=1$

4° <u>Antag</u> $\neg(x+x)=1$

5° <u>Antag</u> $((x+1)+(x+1))=1$

6° $\forall x \forall y \; (x+(y+1)) = ((x+y)+1)$

7° $\forall y \; ((x+1)+(y+1)) = (((x+1)+y)+1)$

8° $((x+1)+(x+1)) = (((x+1)+x)+1)$

9° $(((x+1)+x)+1) = ((x+1)+(x+1))$

10° $(((x+1)+x)+1) = 1$

11° $\neg(((x+1)+x)+1) = 1$

12° $\neg((x+1)+(x+1)) = 1$]]

13° $\neg((x+1)+(x+1)) = 1$]]

14° $(\neg(x+x)=1 \Rightarrow \neg((x+1)+(x+1))=1)$

15° $\forall x \; (\neg(x+x)=1 \Rightarrow \neg((x+1)+(x+1))=1)$

16° $(\neg(1+1)=1 \wedge \forall x(\neg(x+x)=1 \Rightarrow \neg((x+1)+(x+1))=1))$

17° $\forall x \neg(x+x)=1$