KØBENHAVNS UNIVERSITET

Naturvidenskabelig embedseksamen, vinteren 1978-79.

MATEMATIK 314

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt.

Opgave 1

Lad M^m, N^n og L^l være differentiable mangfoldigheder af dimension henholdsvis m, n og l, således at $m = n + l$.

Lad $F : M^m \to N^n$ og $G : M^m \to L^l$ være differentiable afbildninger, således at der for ethvert punkt $p \in M$ gælder:

a) Differentialerne

$$F_{*p} : T_pM \to T_{F(p)}N \quad \text{og} \quad G_{*p} : T_pM \to T_{G(p)}L$$

er begge surjektive.

b) Hvis både $F_{*p}(X_p) = 0$ og $G_{*p}(X_p) = 0$ for en tangentvektor $X_p \in T_pM$, da er $X_p = 0$.

1°. Vis, at der for ethvert $p \in M^m$ findes en basis $\{X_p^1,\dots,X_p^n, X_p^{n+1},\dots,X_p^{n+l}\}$ for T_pM med følgende egenskaber:

i) $\{F_{*p}(X_p^1),\dots,F_{*p}(X_p^n)\}$ er en basis for $T_{F(p)}N$.

ii) $F_{*p}(X_p^{n+1}) = \dots = F_{*p}(X_p^{n+l}) = 0$.

iii) $\{G_{*p}(X_p^{n+1}),\dots,G_{*p}(X_p^{n+l})\}$ er en basis for $T_{G(p)}L$.

2°. Antag nu, at både N og L er orienterbare, og lad ω_N og ω_L være et volumen mål på henholdsvis N og L.

Vis så, at $\omega_M = F^*(\omega_N) \wedge G^*(\omega_L)$ er et volumen mål på M.

(Opgavesættet fortsættes)

Opgave 2

Lad $S^1 \subset E^2$ og $S^2 \subset E^3$ betegne enhedscirklen S^1 og enhedskuglefladen S^2 opfattet som delmangfoldighed i henholdsvis E^2 og E^3. Så kan produktmangfoldigheden $S^1 \times S^2$ på oplagt måde betragtes som delmangfoldighed i $E^5 = E^2 \times E^3$ med inklusionsafbildning $I : S^1 \times S^2 \to E^5$.

Det ses let, at der defineres en afbildning

$$F = (F_1, F_2) : E^2 \to S^1 \times S^2 ,$$

ved for $(u_1, u_2) \in E^2$ at sætte

$$F_1(u_1, u_2) = (\cos u_1, \sin u_1)$$

og

$$F_2(u_1, u_2) = \left(\cos\left(\frac{u_1}{2} + u_2\right)\cdot\cos\frac{u_1}{2},\ \cos\left(\frac{u_1}{2} + u_2\right)\cdot\sin\frac{u_1}{2}, \sin\left(\frac{u_1}{2} + u_2\right)\right).$$

1°. Vis først, at $I \circ F : E^2 \to E^5$ er en immersion.

Vis dernæst, at $F : E^2 \to S^1 \times S^2$ er en immersion.

2°. Lad $M \subset S^1 \times S^2$ betegne billedmængden for F, dvs. $M = F(E^2)$.

Vis så, at $M = F([0,2\pi] \times [0,2\pi])$.

Vis endvidere, at F afbilder $[0,2\pi[\times [0,2\pi[$ bijektivt på M, og at $F(0,u_2) = F(2\pi, 2\pi - u_2)$ for $u_2 \in [0,2\pi]$ og $F(u_1,0) = F(u_1,2\pi)$ for $u_1 \in [0,2\pi]$.

3°. Vis, at M kan gives struktur som en 2-dimensional, kompakt delmangfoldighed af $S^1 \times S^2$, således at F definerer en immersion, der afbilder E^2 surjektivt på M.

Ekstra spørgsmål 4°. (Spørgsmålet kan indgå i bedømmelsen, men er ikke et krav til en fuldstændig besvarelse af opgaven.)

Mangfoldigheden M^2 er en kendt flade. Hvilken?

(Opgavesættet fortsættes)

Opgave 3

Lad S^1 betegne enhedscirklen i E^2 udstyret med sædvanlig Riemann'sk metrik og orientering. Det er velkendt, at der findes et entydigt bestemt differentiabelt vektorfelt X_{S^1} på S^1, således at $X_{S^1}(p)$ er en positiv enhedsvektor i T_pS^1 for ethvert $p \in S^1$. Lad Ω_{S^1} betegne det Riemann'ske volumen mål på S^1. For ethvert $p \in S^1$ gælder så $\Omega_{S^1}(p)(X_{S^1}(p)) = 1$.

Lad nu M^n være en vilkårlig differentiabel mangfoldighed af dimension $n \geq 2$.

1^o. Lad $\alpha : S^1 \to M$ være en differentiabel afbildning.

Vis så, at der defineres en differentiabel afbildning $\alpha' : S^1 \to T(M)$, således at diagrammet

$$\begin{tikzcd} & T(M) \arrow[d, "\pi_M"] \\ S^1 \arrow[ur, "\alpha'"] \arrow[r, "\alpha"'] & M \end{tikzcd}$$

kommuterer, ved fastsættelsen

$$\alpha'(p) = \alpha_{*p}(X_{S^1}(p)) \quad \text{for} \quad p \in S^1.$$

2^o. Antag nu, at M^n er udstyret med en Riemann'sk metrik $(\cdot,\cdot)$. Lad X være et differentiabelt vektorfelt på M, og antag, at X er gradientfeltet for en differentiabel funktion $f : M \to E^1$ med hensyn til $(\cdot,\cdot)$.

Vis så, at der for enhver differentiabel afbildning $\alpha : S^1 \to M$ gælder, at

$$\int_{S^1} (X\circ\alpha,\alpha')\Omega_{S^1} = \int_{S^1} \alpha^*(df) = 0 \ ,$$

(Opgaven fortsættes)

idet $\alpha' : S^1 \to T(M)$ er den differentiable afbildning defineret i spørgsmål 1^0, og $(X\circ\alpha,\alpha') : S^1 \to E^1$ betegner funktionen defineret ved, at $(X\circ\alpha,\alpha')(p) = (X(\alpha(p)), \alpha'(p))_{\alpha(p)}$ for $p \in S^1$.

3^0. Lad endelig X være et vilkårligt differentiabelt vektorfelt på M, og antag, at der findes en imbedding $\alpha : S^1 \to M$, således at $X(\alpha(p)) = \alpha'(p)$ for alle $p \in S^1$. (En sådan imbedding α kaldes en lukket integralkurve for vektorfeltet X.)

Vis så, at X ikke kan være gradientfeltet for nogen differentiabel funktion $f : M \to E^1$, uanset valg af Riemann'sk metrik på M.

Opgave 4.

Lad B være en fast differentiabel mangfoldighed. Vi skal betragte 1-dimensionale, differentiable vektorbundter over B, kort kaldet <u>liniebundter</u> over B.

Lad $\xi = (E(\xi),\pi_\xi,B)$ og $\eta = (E(\eta),\pi_\eta,B)$ være et par af liniebundter over B. Ved fibervist at danne henholdsvis tensorprodukt og dualt vektorrum kan vi danne nye liniebundter over B, nemlig $\xi \otimes \eta = (E(\xi\otimes\eta),\pi_{\xi\otimes\eta},B)$ og $\xi^* = (E(\xi^*),\pi_{\xi^*},B)$, hvor

$$E(\xi \otimes \eta) = \bigcup_{x\in B} \pi_\xi^{-1}(x) \otimes \pi_\eta^{-1}(x) \quad \text{og} \quad E(\xi^*) = \bigcup_{x\in B} (\pi_\xi^{-1}(x))^* ,$$

og hvor projektionerne $\pi_{\xi\otimes\eta}$ og π_{ξ^*} er de oplagte afbildninger. $\xi \otimes \eta$ kaldes tensorproduktet af ξ og η; ξ^* kaldes det duale bundt til ξ.

(Opgaven fortsættes)

Københavns Universitet
Naturvidenskabelig embedseksamen, vinteren 1978-79.
Matematik 314

Der kræves <u>ikke</u> bevis for, at $\xi \otimes \eta$ og ξ^* på entydig måde kan gives struktur som 1-dimensionale, differentiable vektorbundter (altså liniebundter) over B, således at lokale tværsnit i $\xi \otimes \eta$ og ξ^*, dannet ud fra differentiable lokale tværsnit i ξ og η ved naturlige konstruktioner, selv bliver differentiable.

I det følgende betegner $\varepsilon = (B \times E^1, \text{proj.}, B)$ det trivielle liniebundt over B, og ξ betegner et vilkårligt liniebundt over B. Symbolet $\simeq$ mellem liniebundter betegner en bundt isomorfi.

1^o. Vis, at $\xi \otimes \xi^* \simeq \varepsilon$ og $\xi^* \otimes \xi \simeq \varepsilon$.

2^o. Vis, at $\xi \otimes \varepsilon \simeq \xi$ og $\varepsilon \otimes \xi \simeq \xi$.

Lad $P(B)$ betegne mængden af bundt isomorfiklasser af liniebundter over B, og lad $[\xi]$ betegne elementet i $P(B)$ defineret af liniebundtet ξ over B.

3^o. Vis, at der findes et veldefineret produkt

$$\otimes : P(B) \times P(B) \to P(B) \, ,$$

således at $[\xi] \otimes [\eta] = [\xi \otimes \eta]$ for vilkårlige liniebundter ξ og η over B.

4^o. Vis, at $P(B)$ udstyret med produktet $\otimes$ fra spørgsmål 3^o er en abelsk gruppe.

Ekstra spørgsmål

5^o. (Spørgsmålet kan indgå i bedømmelsen, men er ikke et krav til en fuldstændig besvarelse af opgaven.)

Bestem den abelske gruppe $(P(S^1), \otimes)$.

----o0o----