KØBENHAVNS UNIVERSITET

Naturvidenskabelig embedseksamen, vinteren 1977/78.

MATEMATIK 314

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt.

Opgave 1.

Som sædvanligt definerer vi enheds-sfæren S^2 som del-mangfoldighed i det 3-dimensionale euklidiske rum E^3 ved

$$S^2 = \{x = (x_1,x_2,x_3) \in E^3 \mid \sum_{i=1}^{3} x_i{}^2 = 1\}.$$

Punkter i produkt-mangfoldigheden $S^2 \times S^2$ angives så ved punktpar $(x,y) \in S^2 \times S^2$, hvor $x = (x_1,x_2,x_3)$ og $y = (y_1,y_2,y_3)$ er punkter på S^2.

Definer den reelle funktion

$$F: S^2 \times S^2 \to E^1$$

ved $F(x,y) = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i$.

1) Vis, at F er differentiabel.

2) Lad $V = F^{-1}(0)$. Vis, at $V \neq \emptyset$.

3) Vis, at F har rang 1 i ethvert punkt $(x,y) \in V$.

Vink: Man kan f.eks. først vise, at når $(x,y) \in V$, definerer $\alpha(t) = (\cos t \cdot x + \sin t \cdot y, y)$, for $t \in E^1$, en differentiabel kurve på $S^2 \times S^2$, således at $\frac{d}{dt}F(\alpha(t))(0) \neq 0$.

4) Vis, at V er en 3-dimensional, kompakt del-mangfoldighed af $S^2 \times S^2$.

(opgaven fortsættes)

(opgave 1 fortsat)

5) Lad $V_{3,2}$ betegne mængden af ordnede par af ortonormale vektorer i E^3, når E^3 udstyres med sit sædvanlige indre produkt.

Vis, at $V_{3,2}$ kan udstyres med differentiabel struktur som en 3-dimensional, kompakt, differentiabel mangfoldighed.

Opgave 2.

Lad M være en n-dimensional, differentiabel mangfoldighed. Vi siger, at et del-atlas $\mathcal{P}$ for den differentiable struktur på M er trivielt overlappende, såfremt der for ethvert par af kort $\underline{x}: D \subseteq E^n \to M$ og $\underline{y}: E \subseteq E^n \to M$ fra $\mathcal{P}$ med $\underline{x}(D) \cap \underline{y}(E) \neq \emptyset$ gælder, at differentialet

$$d(\underline{y}^{-1}\underline{x})_{\underline{x}^{-1}(p)} : E^n \to E^n$$

er den identiske afbildning på E^n, altså $d(\underline{y}^{-1}\underline{x})_{\underline{x}^{-1}(p)} = 1_{E^n}$, for alle $p \in \underline{x}(D) \cap \underline{y}(E)$.

1) Antag, at M^n har et trivielt overlappende del-atlas for den differentiable struktur. Vis så, at der findes n lineært uafhængige, differentiable vektorfelter $X^1,\dots,X^n$ på M, således at Lie-produkterne $[X^i,X^j] = 0$ for alle $i,j = 1,\dots,n$.

2) Antag, at der findes en immersion $F: M^n \to E^n$. Vis så, at M^n har et trivielt overlappende del-atlas for den differentiable struktur.

(opgavesættet fortsættes)

Opgave 3.

Betragt E^4 med sædvanlige koordinater $(u_1,u_2,u_3,u_4) \in E^4$ hørende til koordinatsystemet $\underline{x} = 1_{E^4}$.

På E^4 defineres nu en række differential former. Først defineres differential formen af grad 4,

$$\omega = du_1 \wedge du_2 \wedge du_3 \wedge du_4 ,$$

og dernæst defineres fire differential former af grad 3 ved successivt at udelade du_i for $i = 1,2,3,4$,

$$\omega^1 = du_2 \wedge du_3 \wedge du_4 \qquad \omega^3 = du_1 \wedge du_2 \wedge du_4$$
$$\omega^2 = du_1 \wedge du_3 \wedge du_4 \qquad \omega^4 = du_1 \wedge du_2 \wedge du_3 .$$

Endelig definerer vi differential formen af grad 1,

$$\theta = u_1du_2 - u_2du_1 + u_3du_4 - u_4du_3 .$$

1) Vis, at $\theta \wedge d\theta = 2 \cdot \sum_{i=1}^{4} (-1)^{i-1} u_i \omega^i$.

2) Vis, at der for ethvert $p \in E^4$ og ethvert sæt af tangentvektorer $\underline{v}_1(p)$, $\underline{v}_2(p)$, $\underline{v}_3(p) \in T_pE^4$ gælder, at

$$\omega_p(\underline{v}_1(p),\underline{v}_2(p),\underline{v}_3(p),\underline{x}_{u_i}(p)) = (-1)^i \omega^i{}_p(\underline{v}_1(p),\underline{v}_2(p),\underline{v}_3(p)) .$$

3) Betragt enheds-sfæren i E^4,

$$S^3 = \{(u_1,u_2,u_3,u_4) \in E^4 \mid \sum_{i=1}^{4} u_i{}^2 = 1\},$$

med standard orientering og standard Riemann'sk metrik induceret fra E^4, og lad Ω betegne det Riemann'ske volumen mål på S^3.

Ved at betragte u_1,u_2,u_3,u_4 som differentiable funktioner på S^3 kan θ opfattes som en differential form på S^3.

Vis så, at $\theta \wedge d\theta = -2\cdot\Omega$.

(opgavesættet fortsættes)

Opgave 4.

Lad M være en differentiabel mangfoldighed, og lad $W = T^*(M)$ være total rummet i det duale tangentbundt til M. Lad $\overline{\pi}_M : W \to M$ betegne den sædvanlige projektion.

Vi bemærker, at et punkt i W er en 1-form $\eta_p \in T_p^*M$ for et punkt $p \in M$. Lad

$$\langle \cdot , \cdot \rangle_{M,p} : T_pM \times T_p^*M \to E^1$$

og

$$\langle \cdot , \cdot \rangle_{W,\eta_p} : T_{\eta_p}W \times T_{\eta_p}^*W \to E^1$$

betegne de kanoniske bilineære parringer af et tangentrum med sit duale rum.

1) Vis, at der for ethvert punkt $\eta_p \in W$ defineres en 1-form $\omega_{\eta_p} \in T_{\eta_p}^*W$ ved fastsættelsen

$$\langle X_{\eta_p} , \omega_{\eta_p} \rangle_{W,\eta_p} = \langle (\overline{\pi}_M)_{*\eta_p}(X_{\eta_p}), \eta_p \rangle_{M,p}$$

for alle $X_{\eta_p} \in T_{\eta_p}W$.

Antag nu for simpeltheds skyld, at M er 1-dimensional. Lad $\underline{x} : D \subseteq E^1 \to M$ være et kort på M med koordinaten $u \in D \subseteq E^1$. Svarende til $\underline{x}$ definerer vi kort $\underline{x}^*$ på W, $\underline{\tilde{x}}^*$ på $T(W)$ og $\underline{\tilde{\tilde{x}}}^*$ på $T^*(W)$ ved fastsættelserne

$$\underline{x}^* : D \times E^1 \to W \quad , \quad \underline{x}^*(u,v) = v \cdot du(u)$$

$$\underline{\tilde{x}}^* : (D \times E^1) \times E^2 \to T(W) , \ \underline{\tilde{x}}^*(u,v,t,s) = t \cdot \underline{x}^*_u(u,v) + s \cdot \underline{x}^*_v(u,v)$$

$$\underline{\tilde{\tilde{x}}}^* : (D \times E^1) \times E^2 \to T^*(W) , \underline{\tilde{\tilde{x}}}^*(u,v,t,s) = t \cdot du(u,v) + s \cdot dv(u,v) .$$

(Opgaven fortsættes)

(opgave 4 fortsat)

Tilordningen af 1-formen $\omega_{\eta_p} \in T^*_{\eta_p} W$, defineret i spørgsmål 1), til ethvert punkt $\eta_p \in W$ definerer et tværsnit ω i bundtet af ydre 1-former over W.

2) Vis, at ω i kortet $\underline{x}^*$ på W har koordinatfremstillingen

$$\omega(\underline{x}^*(u,v)) = v \cdot du(u,v) \ .$$

3) Vis, at ω er en differential form af grad 1 på W, og bestem koordinatfremstillingen af $d\omega$ i kortet $\underline{x}^*$ på W.

4) Beregn elementerne i 2×2-matricen

$$\begin{Bmatrix} d\omega(\underline{x}^*_u, \underline{x}^*_u) & d\omega(\underline{x}^*_u, \underline{x}^*_v) \\ d\omega(\underline{x}^*_v, \underline{x}^*_u) & d\omega(\underline{x}^*_v, \underline{x}^*_v) \end{Bmatrix} .$$

5) Vis, at der defineres en bundt isomorfi af $\tau(W)$ på $\tau^*(W)$ beskrevet ved det kommutative diagram

$$\begin{tikzcd} T(W) \arrow[rr, "m"] \arrow[dr, "\pi_W"'] & & T^*(W) \arrow[dl, "\overline{\pi}_W"] \\ & W & \end{tikzcd} ,$$

hvor m er defineret ved fastsættelsen

$$m(X_{\eta_p})(Y_{\eta_p}) = d\omega(X_{\eta_p}, Y_{\eta_p})$$

for alle $\eta_p \in W$ og alle $X_{\eta_p}, Y_{\eta_p} \in T_{\eta_p} W$.

- o -