KØBENHAVNS UNIVERSITET

Naturvidenskabelig embedseksamen vinteren 1976/77.

MATEMATIK 314

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt.

Opgave 1.

Lad $\xi = (E,\pi,M)$ være et differentiabelt vektorbundt og lad $T_1^*(\xi) = (E^*,\overline{\pi},M)$ være dets tilhørende duale bundt.

1°. Lad $\Phi\colon V \to V^{**}$ være den kanoniske isomorfi af et vektorrum V på dets dobbelt duale rum V^{**}, altså

$$\forall v \in V \ , \ \forall f \in V^* \ : \ \Phi(v)(f) = f(v) \ .$$

Vis, at Φ giver anledning til en bundtisomorfi mellem $\xi = (E,\pi,M)$ og dets dobbelt duale bundt $T_1^*(T_1^*(\xi)) = (E^{**},\overline{\overline{\pi}},M)$.

2°. Vis, at $\xi = (E,\pi,M)$ er trivielt hvis og kun hvis $T_1^*(\xi) = (E^*,\overline{\pi},M)$ er trivielt.

Opgave 2.

Lad E^{n+k} betegne det $(n+k)$-dimensionale euklidiske rum med koordinater $\underline{u} = (u_1,..,u_{n+k}) \in E^{n+k}$ hørende til

(opgaven fortsættes)

(Opgave 2 fortsat)

koordinatsystemet $\underline{x} = \mathrm{id}_{E^{n+k}}$ på E^{n+k}.

1°. Vis, at afbildningen

$$e : TE^{n+k} \to E^{n+k}$$

defineret ved fastsættelsen

$$\forall Y_{\underline{u}} = \sum_{i=1}^{n+k} y_i \underline{x}_{u_i}(\underline{u}) \in T_{\underline{u}}E^{n+k} : e(X_{\underline{u}}) = \underline{u} + \underline{y}$$

er differentiabel.

2°. I det følgende er M en n-dimensional delmangfoldinghed af E^{n+k} med inklusionsafbildning $I: M \to E^{n+k}$. Idet E^{n+k} tænkes udstyret med den flade riemann'ske metrik $(\cdot,\cdot)$ givet ved $(\underline{x}_{u_i}, \underline{x}_{u_j}) = \delta_{ij}$ for $i,j = 1,\ldots,n+k$, lader vi $\nu = (NM,\pi,M)$ betegne normalbundtet til M i E^{n+k}.

Vis, at for alle $p \in M$ er vektorrummene $T_{O_p}NM$, $T_pM \oplus N_pM$ og T_pE^{n+k} isomorfe. Her betegner $O_p \in NM$ nulvektoren i $N_pM \subset NM$.

3°. Restriktionen af e til delmangfoldingheden $NM \subset TE^{n+k}$ betegnes ligeledes med e.

Vis, at for alle $p \in M$ er

$$e_{*O_p} : T_{O_p}NM \to T_pE^{n+k}$$

en lineær isomorfi.

(opgaven fortsættes)

(Opgave 2 fortsat)

4^o. M antages i det følgende tillige at være kompakt. For ethvert $\varepsilon > 0$ sættes $NM_\varepsilon = \{Y_p \in NM \mid \|Y_p\| = \sqrt{(Y_p,Y_p)} < \varepsilon\}$.

Vis, at der findes et $\varepsilon > 0$ således at

$$e : NM_\varepsilon \to e(NM_\varepsilon)$$

er en diffeomorfi. (Bemærk, at restriktionen af e til nul-tværsnittet af NM er inklusionsafbildningen I).

5^o. Lad A være en afsluttet delmængde af en parakompakt mangfoldighed V, og lad $f: V \to M$ være en kontinuert afbildning, der er differentiabel på A.

Vis, at der for ethvert $\delta > 0$ findes en differentiabel afbildning $g: V \to M$, således at

$$\forall p \in V : \|I(f(p)) - I(g(p))\| < \delta$$

og $f_{|A} = g_{|A}$.

Opgave 3.

Lad (M,g_M) og (N,g_N) være orienterede riemann'ske mangfoldigheder med riemann'ske volumenmål dV_M og dV_N.

(Opgave 3 fortsat)

Lad endvidere

$$\pi_M : M \times N \to N \quad \text{og} \quad \pi_N : M \times N \to N$$

betegne projektionerne på M og N.

1°. Produktmetrikken på $M \times N$ er givet ved

$$g_{M\times N} = \pi_M^*(g_M) + \pi_N^*(g_N)$$

altså

$$\forall (X_p^M, X_q^N),\ (Y_p^M, Y_q^N) \in T_pM \times T_qN \cong T_{(p,q)}M\times N :$$

$$g_{M\times N}((X_p^M, X_q^N), (Y_p^M, Y_q^N)) = g_M(X_p^M, Y_p^M) + g_N(X_q^N, Y_q^N).$$

(Der kræves ikke bevis for, at $g_{M\times N}$ er en riemann'sk metrik på $M\times N$).

Vis, at $\pi_M^*(dV_M) \wedge \pi_N^*(dV_N)$ er et riemann'sk volumenmål på $M\times N$.

2°. Lad i det følgende M og N tillige være kompakte.

En differentialform ω af grad r siges at være <u>lukket</u> såfremt $d\omega = 0$ og <u>eksakt</u> såfremt der findes en $(r-1)$-form η så $d\eta = \omega$.

(opgaven fortsættes)

Naturvidenskabelig embedseksamen vinteren 1976/77.
Matematik 314.

(opgave 3 fortsat)

Vis, at $\pi_N^*(dV_N)$ er lukket, og at $\pi_M^*(dV_M)$ ikke er eksakt.

3^o. Vis, at $\mathrm{vol}(M\times N) = \mathrm{vol}(M)\cdot\mathrm{vol}(N)$.

\- o -

Der lægges vægt på udformningen af besvarelsen, herunder formuleringen af den ledsagende tekst og udførelsen af eventuelle figurer. Benyttes vigtige sætninger m.v. fra lærebøger, er henvisninger til disse ønskelige.

Besvarelserne ønskes afleverede på de til renskrivning beregnede ark. Kun når særlige omstændigheder taler herfor, kan kladden afleveres; de dele af denne, der ønskes taget i betragtning, må da være tydeligt afmærkede.