Københavns universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen vinteren 1975/76

MATEMATIK 314

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt.

Opgave 1.

Lad M og N være differentiable mangfoldigheder og lad $F : M \to N$ være en submersion.

1°. Vis, at for enhver åben mængde $U \subseteq M$ er $F(U) \subseteq N$ åben.

2°. Lad V være en differentiabel mangfoldighed og lad $f : F(M) \to V$ være en vilkårlig afbildning.

Vis, at f er differentiabel hvis og kun hvis $f \circ F$ er differentiabel.

Opgave 2.

Lad $(M, \langle .,. \rangle)$ være en riemannsk mangfoldighed og lad $X \in \mathfrak{X}(M)$ være et differentiabelt vektorfelt på M.

1°. Definer $\omega_X : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{D}^0(M)$ ved fastsættelsen

$$\forall Y \in \mathfrak{X}(M) : \omega_X(Y) := \langle X, Y \rangle .$$

(opgaven fortsættes)

Vis, at der herved er defineret en differential form $\omega_X \in \mathcal{D}^1(M)$.

2^o. Definer for ethvert $Y \in \mathfrak{X}(M)$ vektorfeltet $Y^h \in \mathfrak{X}(M)$ ved fastsættelsen

$$Y^h := Y - \langle Y,X\rangle X .$$

Lad $\Omega_X : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathcal{D}^0(M)$ være givet ved

$$\forall Y_1,Y_2 \in \mathfrak{X}(M) : \Omega_X(Y_1,Y_2) := d\omega_X(Y_1^h,Y_2^h) .$$

Vis, at der herved er defineret en differential form $\Omega_X \in \mathcal{D}^2(M)$.

3^o. Vis, at såfremt $\langle X,X\rangle = 1$ er $\Omega_X = 0$ hvis og kun hvis

$$\forall Y_1,Y_2 \in \mathfrak{X}(M) : \langle X, [Y_1^h,Y_2^h]\rangle = 0 .$$

Opgave 3.

Lad G være en n-dimensional Lie gruppe med produkt $\mu : G\times G \to G$. Lad endvidere G være udstyret med venstre invariant riemannsk metrik $\langle .,. \rangle$ og venstre invariant riemannsk volumen mål dV.

1^o. Lad $X_1,\ldots,X_n \in \mathfrak{g}$ være venstre invariante vektorfelter på G med $\langle X_i,X_j\rangle = \delta_{ij}$ og lad $\omega_1,\ldots,\omega_n$ betegne de duale 1-former på G, altså $\omega_i = m\circ X_i$, $i=1,\ldots,n$.

Vis, at $dV = \omega_1\wedge\ldots\wedge\omega_n$.

(opgaven fortsættes)

2^o. $G\times G$ gives struktur som en $2n$-dimensional Lie gruppe med produkt

$$\bar{\mu} : (G\times G) \times (G\times G) \to (G\times G)$$

givet ved

$$\forall (g_1,g_2),(g_1',g_2') \in G\times G :$$
$$\bar{\mu}((g_1,g_2),(g_1',g_2')) = (\mu(g_1,g_1'),\mu(g_2,g_2')).$$

Endvidere defineres en riemannsk metrik $\langle\langle .,. \rangle\rangle$ på $G\times G$ ved fastsættelsen

$$\forall (X_a,Y_b),(X_a',Y_b') \in T_{(a,b)}G\times G :$$
$$\langle\langle (X_a,Y_b),(X_a',Y_b')\rangle\rangle = \langle X_a,X_a'\rangle + \langle Y_b,Y_b'\rangle .$$

Vis, at $\langle\langle .,. \rangle\rangle$ er en venstre invariant riemannsk metrik på $G\times G$.

3^o. Idet $P_i : G\times G \to G$, $i = 1,2$ betegner projektionen

$$\forall (g_1,g_2) \in G\times G : P_i(g_1,g_2) = g_i \ , \ i = 1,2$$

sættes $\Omega = P_1^*(dV) \wedge P_2^*(dV)$.

Vis, at Ω er et venstre invariant riemannsk volumen mål på $G\times G$.

4^o. Definer $f : G\times G \to G\times G$ ved fastsættelsen

$$\forall (g_1,g_2) \in G\times G : f(g_1,g_2) = (g_2^{-1},\mu(g_2,g_1)) .$$

Vis, at f er en diffeomorfi.

(opgaven fortsættes)

Naturvidenskabelig embedseksamen vinteren 1975/76,

Matematik 314.

5°. Find samtlige fixpunkter for f og vis, at f er orienteringsbevarende, såfremt G er sammenhængende.

\- o -

Der lægges vægt på udformningen af besvarelsen, herunder formuleringen af den ledsagende tekst og udførelsen af eventuelle figurer. Benyttes vigtige sætninger m.v. fra lærebøger, er henvisninger til disse ønskelige.

Besvarelserne ønskes afleverede på de til renskrivning beregnede ark. Kun når særlige omstændigheder taler herfor, kan kladden afleveres; de dele af denne, der ønskes taget i betragtning, må da være tydeligt afmærkede.