Københavns universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen vinteren 1974/75.

MATEMATIK 314

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt.

Opgave 1.

Lad M^n og N^n være n-dimensionale differentiable mangfoldigheder.

1°. Vis, at hvis $F : M^n \to N^n$ er en immersion, så er billedmængden $F(M^n)$ åben i N^n.

2°. Lad E^n betegne det n-dimensionale euklidiske rum.

Vis, at hvis M^n er kompakt, så findes der ingen immersion af M^n ind i E^n.

Opgave 2.

Lad M være en orienteret differentiabel mangfoldighed med Riemann'sk metrik $(\cdot,\cdot)$ og Riemann'sk volumenmål dV. Hvis $f \in \mathcal{D}^\circ(M)$ er Laplace operatoren Δ som bekendt givet ved

$$\Delta(f) = \operatorname{div}(\operatorname{grad}(f)).$$

(opgaven fortsættes)

Naturvidenskabelig embedseksamen vinteren 1974/75.

Matematik 314.

1°. Vis, at

$$\Delta(f\cdot f) = 2(\mathrm{grad}(f),\mathrm{grad}(f)) + 2f\cdot\Delta(f)$$

for alle $f \in \mathcal{D}^\circ(M)$.

2°. Vis, at hvis M er kompakt, så er

$$\int_M \Delta(g)dV = 0$$

for alle $g \in \mathcal{D}^\circ(M)$.

3°. $f \in \mathcal{D}^\circ(M)$ siges at være <u>harmonisk</u> hvis $\Delta(f) = 0$.

Vis, at hvis M er kompakt og sammenhængende, så er enhver harmonisk afbildning konstant.

Opgave 3.

Lad E^k betegne det k-dimensionale euklidiske rum med koordinater $\underline{u} = (u_1,\cdots,u_k) \in E^k$ hørende til koordinatsystemet $\underline{x} = 1_{E^k}$ på E^k. Det indre produkt i E^k

$$\langle\cdot,\cdot\rangle : E^k\times E^k \to E^1$$

er som sædvanlig givet ved $\langle\underline{u},\underline{v}\rangle = \sum_{i=1}^{k} u_i\cdot v_i$, hvor $\underline{u} = (u_1,\cdots,u_k)$ og $\underline{v} = (v_1,\cdots,v_k)$.

1°. Definer $F : E^k\times E^k \to E^1$ ved fastsættelsen

$$F(\underline{u},\underline{v}) = \langle\underline{u}-\underline{v},\underline{u}-\underline{v}\rangle = \|\underline{u}-\underline{v}\|^2$$

for alle $(\underline{u},\underline{v}) \in E^k\times E^k$.

Vis, at F er differentiabel.

(opgaven fortsættes)

2°. For en vilkårlig tangentvektor $(X_{\underline{u}}, Y_{\underline{v}}) \in T_{\underline{u}}E^k \times T_{\underline{v}}E^k \cong T_{(\underline{u},\underline{v})}E^k \times E^k$ med $X_{\underline{u}} = \sum_{i=1}^{k} x_i \underline{x}_{u_i}(\underline{u})$ og $Y_{\underline{v}} = \sum_{i=1}^{k} y_i \underline{x}_{u_i}(\underline{v})$ sættes $\underline{x} = (x_1, \cdots, x_k)$ og $\underline{y} = (y_1, \cdots, y_k)$.

Vis, at

$$dF_{(\underline{u},\underline{v})}(X_{\underline{u}}, Y_{\underline{v}}) = 2\langle \underline{u}-\underline{v}, \underline{x}-\underline{y}\rangle.$$

3°. For $\underline{u}, \underline{v} \in E^k$ lader vi $\overline{\underline{uv}}$ betegne tangentvektoren til E^k med fodpunkt i $\underline{u}$ og endepunkt i $\underline{v}$, altså

$$\overline{\underline{uv}} = \sum_{i=1}^{k} (v_i - u_i)\underline{x}_{u_i}(\underline{u}) \quad .$$

$\langle \cdot , \cdot \rangle$ skal nu tillige betegne den flade Riemann'ske metrik på E^k fastlagt ved kravet $\langle \underline{x}_{u_i}, \underline{x}_{u_j} \rangle = \delta_{ij}$ for $i,j = 1, \cdots, k$.

Lad M være en n-dimensional $(n \geqq 1)$ delmangfoldighed af E^k med inklusions afbildning $I : M \to E^k$. Sæt $I(p) = \underline{p}$ for ethvert $p \in M$. Idet $(p,q) \in M \times M$ med $p \neq q$ siges liniestykket

$$[\underline{p}, \underline{q}] = \{t \cdot \underline{p} + (1-t)\underline{q} \mid t \in [0,1]\} \subseteq E^k$$

at være en <u>lodlinie</u> for M i E^k, hvis $\overline{\underline{pq}} \in N_pM$ og $\overline{\underline{qp}} \in N_qM$, hvor N_pM henholdsvis N_qM betegner normalrummet til M i p henholdsvis q.

Idet $f : M \times M \to E^1$ defineres ved $f(p,q) = F(\underline{p}, \underline{q})$, og $M \times M$ gives produktstruktur, skal det vises at $df_{(p,q)} = 0$

(opgaven fortsættes)

hvis og kun hvis $p = q$ eller $[\underline{p},\underline{q}]$ er en lodlinie for M i E^k.

4°. Vis, at hvis M er kompakt, så findes der en lodlinie for M i E^k.

5°. Giv et eksempel på en ikke kompakt delmangfoldighed M af E^k, for hvilken der ingen lodlinie findes.

\- o -

Der lægges vægt på udformningen af besvarelsen, herunder formuleringen af den ledsagende tekst og udførelsen af eventuelle figurer. Benyttes vigtige sætninger m.v. fra lærebøger, er henvisninger til disse ønskelige.

Besvarelserne ønskes afleverede på de til renskrivning beregnede ark. Kun når særlige omstændigheder taler herfor, kan kladden afleveres; de dele af denne, der ønskes taget i betragtning, må da være tydeligt afmærkede.