Københavns Universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen

Vinteren 1969-70

MATEMATIK 3

Skriftlig prøve

Alle hjælpemidler er tilladt. En besvarelse betragtes som fuldstændig, hvis tre af nedenstående fire opgaver er korrekt løste.

Opgave 1.

I den reelle projektive plan betragtes en fuldstændig firkant med vinkelspidserne A_0, A_1, A_2, A_3 samt en linie m, der hverken går gennem en af vinkelspidserne eller et af diagonalpunkterne. Firkantens sider falder i tre par modstående: $(A_0A_1,\ A_2A_3)$, $(A_0A_2,\ A_3A_1)$, $(A_0A_3,\ A_1A_2)$. Skæringspunkterne mellem m og siderne i den angivne orden betegnes P_1, Q_1, P_2, Q_2, P_3, Q_3. Der gælder da, at den projektivitet φ: $m \to m$, for hvilken $\varphi(P_i) = Q_i$, $i = 1,2,3$, er involutorisk.

1) Bevis denne sætning ved at gøre rede for, at den afbildning af m på sig selv, der fås ved sammensætning af centralprojektionerne af m på linien A_2A_3 ud fra A_0, af linien A_2A_3 på linien A_0A_1 ud fra Q_2 of af linien A_0A_1 på m ud fra A_2, har de forlangte egenskaber.

(Fortsættes)

Opgave 1. (Fortsat)

2) Benyt sætningen til at løse følgende konstruktionsopgave med linealen: På en linie m er givet fire indbyrdes forskellige punkter P_1, Q_1, P_2, Q_2. Idet φ: $m \to m$ er den involutoriske projektivitet bestemt ved $\varphi(P_1) = Q_1$, $\varphi(Q_1) = P_1$, $\varphi(P_2) = Q_2$, skal man konstruere billedpunktet $\varphi(P_3)$ af et femte punkt P_3 på m.

Opgave 2.

I det reelle tredimensionale projektive rum antages valgt et projektivt koordinatsystem (E_0, E_1, E_2, E_3; E). En kvadrik K har med hensyn til dette

$$x_0^2 + x_2x_3 + x_3x_1 + x_1x_2 = 0$$

som en ligning.

1) Angiv en bilinearform, der bestemmer den til K hørende polaritet.

2) Gør rede for, at punkterne E_1, E_2, E_3 ligger på K, og find ligninger for tangentplanerne i disse punkter.

3) Bestem for hver af de tre tangentplaner dens fællesmængde med K, og gør rede for, at K er en retlinet kvadrik.

4) Find for frembringerne gennem E_1, E_2, E_3 parameterfremstillinger (af formen $\underline{\underline{x}}| = \lambda\underline{\underline{a}}| + \mu\underline{\underline{b}}|$, hvor $\underline{\underline{a}}|$ og $\underline{\underline{b}}|$ er koordinatsøjler for faste punkter på den pågældende linie, og (λ,μ) gennemløber de fra (0,0) forskellige reelle talpar). Angiv endvidere, hvorledes de seks frembringere fordeler sig på de to frembringerskarer.

(Fortsættes)

Mat. 3, vinteren 1969-70

Opgave 3.

En rumkurve K antages bestemt ved en naturlig parameterfremstilling $P(s)$, $s \in J$, af klasse C^3, hvor $J \subseteq \mathbb{R}$ betegner et åbent interval. Det forudsættes, at kurvens krumning $\kappa(s)$ er positiv for $s \in J$, og at dens torsion $\tau: J \to \mathbb{R}$ er af klasse C^1. Idet binormalvektoren for K i $P(s)$ betegnes $\underline{v}_3(s)$, betragtes desuden rumkurven L med parameterfremstilling

$$Q(s) = P(s) + \lambda(s)\underline{v}_3(s), \quad s \in J,$$

hvor $\lambda: J \to \mathbb{R}_+$ er en funktion af klasse C^1.

1) Vis, at binormalen til K i $P(s)$ for hvert $s \in J$ er en normal til L i $Q(s)$, hvis og kun hvis λ er konstant.

2) Find nødvendige og tilstrækkelige betingelser, som λ, κ og τ må opfylde, for at kurven L for hvert $s \in J$ har en hovednormal i $Q(s)$, der falder sammen med binormalen til K i $P(s)$.

3) Vis ved hjælp af rumkurveteoriens hovedsætning, at der findes par af rumkurver K og L med den under 2) nævnte egenskab, og at man endda kan foreskrive tallet $\lambda > 0$ og med visse indskrænkninger torsionen $\tau: J \to \mathbb{R}$ af K.

(Fortsættes)

Mat. 3, vinteren 1969-70

Opgave 4.

1) Gør rede for, at et punkt P_0 på et regulært fladestykke af klasse C^2 er et kuglepunkt, hvis og kun hvis der findes et reelt tak k således, at der for fundamentalformernes koefficienter i P_0 gælder

$$L_{ij} = kg_{ij}, \qquad i,j = 1,2.$$

2) Find kuglepunkterne på den elliptiske paraboloide F, der med hensyn til et sædvanligt retvinklet koordinatsystem er bestemt ved

$$x_3 = \frac{x_1^2}{a_1^2} + \frac{x_2^2}{a_2^2}, \qquad (x_1,x_2) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R},$$

hvor a_1 og a_2 er givne tal, for hvilke $0 < a_2 < a_1$.

3) Angiv normalkrumningen i et af de fundne kuglepunkter P_0 for kurverne på F, som går gennem punktet P_0 og i dette har en oskulationsplan forskellig fra tangentplanen til F i P_0. Find endvidere krumningen i P_0 af den kurve, hvori F skæres af planen gennem P_0 parallel med x_1x_2-planen.