Københavns Universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen

Sommeren 1969

Matematik 3

Skriftlig prøve

Alle hjælpemidler er tilladt

En besvarelse betragtes som fuldstændig, hvis tre af nedenstående fire opgaver er korrekt løste.

## Opgave nr. 1.

I en projektiv plan er valgt et projektivt koordinatsystem $(E_0, E_1, E_2; E)$.

Vis ved bestemmelse af en matrixligning, at der findes netop én projektiv kollineation $\varphi$ af planen med følgende egenskaber:

1) Punkterne $E_0$ og $E_2$ er fixpunkter, og der findes ikke andre.

2) $\varphi(E_1)$ er et givet (fra $E_0$ og $E_1$ forskelligt) punkt $A(a_0, a_1, 0)$ på linien $E_0E_1$.

3) $\varphi(E_{02})$, hvor $E_{02}$ betegner projektionen af $E$ fra $E_1$ på linien $E_0E_2$, er et givet (fra $E_0$ , $E_2$ og $E_{02}$ forskelligt) punkt $B(b_0, 0, b_2)$ på linien $E_0E_2$.

Vis endvidere, at $\varphi$ er ombyttelig med enhver anden projektiv kollineation, der har nøjagtig de samme fixpunkter og fixlinier som $\varphi$.

## Opgave nr. 2.

I et 3-dimensionalt projektivt rum er $A_0$ , $A_1$ , $A_2$ , $A_3$ punkter, som ikke ligger i samme plan. En plan $A^*$, som ikke går gennem noget af de fire punkter, skærer linierne $A_0A_1$ ,

(opgaven fortsætter)

$A_1A_2$ , $A_2A_3$ , $A_3A_0$ henholdsvis i punkterne $A_{01}$ , $A_{12}$ , $A_{23}$ , $A_{30}$ . Med $P_{01}$ , $P_{12}$ , $P_{23}$ , $P_{30}$ betegnes punkter, som er forskellige fra $A_0$ , $A_1$ , $A_2$ , $A_3$ og ligger på henholdsvis $A_0A_1$ , $A_1A_2$ , $A_2A_3$ , $A_3A_0$ .

Vis (med benyttelse af det projektive koordinatsystem med $A_0A_1A_2A_3$ som fundamentaltetraeder og $A^*$ som enhedsplan), at

$$df(A_0A_1A_{01}P_{01})\ df(A_1A_2A_{12}P_{12})\ df(A_2A_3A_{23}P_{23})\ df(A_3A_0A_{30}P_{30}) = 1,$$

hvis og kun hvis $P_{01}$ , $P_{12}$ , $P_{23}$ , $P_{30}$ ligger i en plan.

## Opgave nr. 3.

Om parameterfremstillingen $P(u^1,u^2)$, $(u^1,u^2) \in \Omega$ , af klasse $C^3$ for et fladestykke F uden kugle- eller fladpunkter forudsættes, at parameterkurverne er fladestykkets krumningskurver.

1) Gør rede for, at dette er ensbetydende med, at der for koefficienterne i 1. og 2. fundamentalform gælder $g_{12} = 0$ og $L_{12} = 0$. Angiv hovedkrumningerne udtrykt ved fundamentalformernes koefficienter.

2) Vis, at der for middelkrumningen gælder $H = 0$ i et punkt af F, hvis og kun hvis asymptoteretningerne i dette punkt er ortogonale.

3) Vis, at hvis $H = 0$ i et punkt P af F, vil den sfæriske afbildning $\sigma$ af F være vinkeltro i P (dvs. hvilke som helst to tangentvektorer til F i P vil ved den af $\sigma$ inducerede lineære afbildning afbildes på vektorer, der danner samme vinkel som de oprindelige).

Vis, omvendt, at hvis blot to ortogonale egentlige tan-

(Opgaven fortsætter)

gentvektorer til F i P, som ikke falder i hovedretningerne, ved den af $\sigma$ inducerede lineære afbildning afbildes på ortogonale vektorer, så er H = 0 i P.

## Opgave nr. 4.

Der er givet en rumkurve K ved en naturlig parameterfremstilling $A(u^1)$, $u^1 \in J$, af klasse $C^5$, hvor $J \subseteq \mathbb{R}$ betegner et åbent interval. Det forudsættes, at K har overalt positiv krumning.

Find en parameterfremstilling for den vridningsfri retlinede flade F, som indeholder K og i hvert punkt $A(u^1)$ har hovednormalvektoren $\underline{v}_2(u^1)$ for K som normalvektor.

Find en nødvendig og tilstrækkelig betingelse, som forholdet $\lambda = \frac{\tau}{\kappa}$ mellem torsionen og krumningen af K må opfylde, for at

1) F er en cylinderflade,

2) F er en kegleflade,

3) F er en regulær kurves tangentflade.

Angiv i det sidste tilfælde en parameterfremstilling for spidskanten.