Københavns Universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen

Vinteren 1968-69

Matematik 3

Skriftlig prøve

Alle hjælpemidler er tilladt

En besvarelse betragtes som fuldstændig, hvis tre af nedenstående fire opgaver er korrekt løste.

Opgave nr. 1.

I den reelle projektive plan er givet to forskellige rette linier l og l'. Deres skæringspunkt betegnes med S.

1) Lad A være et punkt på l og A' et punkt på l', begge forskellige fra S. Lad endvidere m være en ret linie forskellig fra l og l'. Ved centralprojektionen fra A' af l på m efterfulgt af centralprojektionen fra A af m på l' bestemmes en projektivitet $\varphi: l \rightarrow l'$.

Angiv punkterne $\varphi(A)$, $\varphi(S)$ og $\varphi^{-1}(S)$.

Vis, at der for hvilke som helst forskellige punkter X, Y på l og deres billedpunkter $X' = \varphi(X)$, $Y' = \varphi(Y)$ gælder, at linierne XY' og YX' skærer hinanden på m.

2) Vis, at der til enhver projektivitet $\varphi: l \rightarrow l'$ findes en ret linie m således, at linierne XY' og YX', hvor X, Y er hvilke som helst forskellige punkter på l og $X' = \varphi(X)$, $Y' = \varphi(Y)$, skærer hinanden på m.

Vis endvidere, at m går gennem S, hvis og kun hvis $\varphi(S) = S$.

(fortsættes)

Opgave nr. 2.

1) I den reelle projektive plan er givet tre rette linier e_0, e_1, e_2, som ikke går gennem samme punkt, samt et punkt E, som ikke ligger på nogen af de tre linier. Endvidere er givet et reelt tal k forskelligt fra 0 og 1.

En vilkårlig linie l gennem E skærer e_0, e_1, e_2 i henholdsvis L_0, L_1, L_2 . Under forudsætning af, at L_0, L_1, L_2 er indbyrdes forskellige, betegnes med X det punkt på l, for hvilket

$$df(L_0L_1L_2X) = k.$$

Vis, at punkterne X for alle sådanne linier l ligger på et keglesnit, som går gennem E og skæringspunkterne mellem linierne e_0, e_1, e_2 .

2) I den euklidiske plan gælder sætningen:

Givet to hinanden skærende linier og et punkt uden for begge. For enhver linie gennem dette punkt, der skærer de givne linier, ligger midtpunktet af det ved skæringspunkterne bestemte liniestykke på en (af linien uafhængig) hyperbel, hvis asymptoter er parallelle med de givne linier.

Gør rede for, at denne sætning kan fås ved specialisering af den foregående.

Opgave nr. 3.

I den euklidiske plan er givet en kurve K_0 ved en naturlig parameterfremstilling $P_0(s)$, $s \in J$, af klasse C^3. For et vilkårligt reelt tal c betragtes kurven K_c med parameterfremstillingen

(fortsættes)

$$P_c(s) = P_0(s) + c\underline{v}_{01}(s) , \qquad s \in J,$$

hvor $\underline{v}_{01}(s)$ betegner tangentvektoren for K_0 i $P_0(s)$. Denne kurves krumning i punktet $P_c(s)$ betegnes med $\kappa_c(s)$ og, hvis $\kappa_c(s) \neq 0$, dens krumningscentrum i $P_c(s)$ med $Q_c(s)$.

1) Vis, at

$$\kappa_c(s) + \kappa_{-c}(s) = 2\kappa_0(s)\,(1 + c^2\kappa_0(s)^2)^{-\frac{1}{2}}, \qquad s \in J.$$

2) Vis, at for hvert $s \in J$, for hvilket $\kappa_c(s) \neq 0$ og $\kappa_{-c}(s) \neq 0$, ligger punkterne $P_0(s)$, $Q_c(s)$ og $Q_{-c}(s)$ på en ret linie.

3) Formuler og begrund et udsagn om $P_0(s)$, $Q_c(s)$ og normalen til K_{-c} i $P_{-c}(s)$, som kan træde i stedet for 2), hvis $\kappa_c(s) \neq 0$, men $\kappa_{-c}(s) = 0$.

Opgave nr. 4.

1) Angiv en parameterfremstilling for omdrejningsfladen, der fås ved drejning af en cirkel med radius 1 om en af sine tangenter.

2) Angiv den delmængde af parameterområdet, hvori parameterfremstillingen er regulær.

3) Bestem den delmængde af parameterområdet, til hvilken der svarer fladepunkter med negativ Gaussisk krumning.

4) Opstil for den tilsvarende del af fladen differentialligningen for asymptotekurverne.

(fortsættes)

Københavns Universitet

Mat.3, vinteren 1968-69.

5) Find, udtrykt ved parametrene, cosinus til vinklen mellem en asymptotekurve gennem et fladepunkt og parallelcirklen gennem samme punkt.

6) Find, udtrykt ved et integral, længden af en vilkårlig delbue af en asymptotekurve.