Københavns Universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen

Sommeren 1968

Matematik 3

Skriftlig prøve

Alle hjælpemidler er tilladt

En besvarelse betragtes som fuldstændig, hvis tre af nedenstående fire opgaver er korrekt løste.

Opgave nr. 1.

I den reelle projektive plan er givet tre punkter D, D' og D'', som ikke ligger på ret linie. Med φ, φ' og φ'' betegnes de harmoniske homologier, der hver har et af de tre punkter som centrum og dets modstående side i trekant $DD'D''$ som akse.

1) Vis, at $\varphi''\circ\varphi'\circ\varphi$ er planens identiske afbildning.

Det antages nu, at $DD'D''$ er en selvpolær trekant med hensyn til et keglesnit k.

2) Lad A_1 være et punkt på k, som ikke ligger på nogen af trekantens sider. Med A_2 og A_3 betegnes de fra A_1 forskellige punkter, hvori k skæres af linierne $D'A_1$ og $D''A_1$. Vis, at D, A_2 og A_3 ligger på ret linie.

3) Vis, at der findes en fuldstændig firkant $A_1A_2A_3A_4$, som er indskrevet i k, og hvis diagonalpunkter er D, D', D''.

Opgave nr. 2.

I et tredimensionalt projektivt rum er valgt et projektivt koordinatsystem $(E_0, E_1, E_2, E_3; E)$. Der er givet to forskellige punkter $X(x_0, x_1, x_2, x_3)$ og $Y(y_0, y_1, y_2, y_3)$, hvis forbindelseslinie l ikke skærer nogen af fundamentaltetraedrets kantlinier.

(Opgaven fortsætter)

1) Find, udtrykt ved størrelserne

$$p_{ij} = - p_{ji} = \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ x_j & y_j \end{vmatrix}, \qquad i,j = 0,1,2,3 ,$$

et koordinatsæt for skæringspunktet P_k , $k = 0,1,2,3$, mellem l og den af fundamentaltetraedrets sideplaner, der ikke indeholder E_k .

2) Punkterne P_0, P_1, P_2, P_3 projiceres fra en af fundamentaltetraedrets kantlinier på den modstående. Find koordinatsæt for punkternes projektioner, og beregn dobbeltforholdet $df(P_0,P_1,P_2,P_3)$.

3) Vis, f.eks. ved hjælp heraf, at

$$p_{01}p_{23} + p_{02}p_{31} + p_{03}p_{12} = 0.$$

Opgave nr. 3.

Der er givet en rumkurve K ved en naturlig parameterfremstilling $A(s)$, $s \in]\alpha,\beta[$, af klasse C^3. Det forudsættes, at kurvens krumning er positiv for alle $s \in]\alpha,\beta[$. Med $\underline{v}_2(s)$ og $\underline{v}_3(s)$ betegnes henholdsvis hovednormal- og binormalvektoren for K i $A(s)$. Idet $\Theta:]\alpha,\beta[\to] -\frac{1}{2}\pi , \frac{1}{2}\pi[$ er en funktion af klasse C^1, betragtes den retlinede flade F_Θ med parameterfremstillingen

$$P(s,u) = A(s) + u\,\underline{a}(s), \qquad (s,u) \in]\alpha,\beta[\times \mathbb{R} ,$$

hvor

$$\underline{a}(s) = \underline{v}_2(s) \cos \Theta(s) + \underline{v}_3(s) \sin \Theta(s)$$

er den normalvektor til K i $A(s)$, som danner vinklen $\Theta(s)$ med $\underline{v}_2(s)$.

(Opgaven fortsætter)

1) Opstil en nødvendig og tilstrækkelig betingelse, som Θ må opfylde, for at F_Θ er vridningsfri.

2) Det antages, at denne betingelse er opfyldt, og at F_Θ er en tangentflade. Find en parameterfremstilling $Q(s)$, $s \in]\alpha,\beta[$, for dennes spidskant.

3) Vis, at i ethvert delinterval af $]\alpha,\beta[$, hvor $Q(s)$ er regulær, vil afstanden $|A(s)Q(s)|$ være en naturlig parameter for spidskanten (altså, at K er en "afvikler" for spidskanten).

Opgave nr. 4.

I rummet er valgt et sædvanligt retvinklet koordinatsystem. Med hensyn til dette er

$$\begin{aligned} x_1 &= u_1 + u_1 u_2^2 - \tfrac{1}{3} u_1^3 , \\ x_2 &= -u_2 - u_2 u_1^2 + \tfrac{1}{3} u_2^3 , \qquad (u_1,u_2) \in \Omega \subsetneq \dot{R} \times \dot{R} , \\ x_3 &= u_1^2 - u_2^2 , \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} \bar{x}_1 &= u_2 - u_2 u_1^2 + \tfrac{1}{3} u_2^3 , \\ \bar{x}_2 &= u_1 - u_1 u_2^2 + \tfrac{1}{3} u_1^3 , \qquad (u_1,u_2) \in \Omega \subsetneq \dot{R} \times \dot{R} , \\ \bar{x}_3 &= 2u_1 u_2 , \end{aligned}$$

parameterfremstillinger for to flader F og $\bar{F}$. (Parametrenes mærketal sættes her forneden for at undgå forveksling med potenseksponenter.) Det antages, at parameterområdet Ω er valgt således, at begge parameterfremstillinger er bijektive. Ved til hvert punkt P på F at lade svare det punkt $\bar{P}$ på $\bar{F}$, som hører

(opgaven fortsætter)

til samme parametersæt (u_1, u_2), defineres en afbildning $\varphi : F \to \bar{F}$.

1) Vis, at tangentplanen T_P til F i P er parallel med tangentplanen $T_{\bar{P}}$ til $\bar{F}$ i $\bar{P} = \varphi(P)$. Beskriv den lineære afbildning af T_P ind i $T_{\bar{P}}$, som bestemmes ved φ.

2) Vis, at afbildningen φ er isometrisk.

3) Vis, at begge fladers middelkrumning er konstant lig med 0.

4) Vis, at krumningskurverne på F ved φ afbildes på asymptotekurverne på $\bar{F}$. Gør, ved hjælp heraf eller på anden måde, rede for, at φ ikke er restriktion af en isometrisk afbildning af hele rummet på sig selv.