Københavns Universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen

Vinteren 1967/68

Matematik 3

Skriftlig prøve

Alle hjælpemidler er tilladt

En besvarelse betragtes som fuldstændig, hvis tre af nedenstående fire opgaver er korrekt løste.

Opgave nr. 1.

I den reelle projektive plan er valgt et koordinatsystem $(E_0, E_1, E_2; E)$. Fundamentallinierne $E_0 \vee E_2$ og $E_0 \vee E_1$ betegnes henholdsvis e_1 og e_2. Der er givet projektiviteter φ_1 af e_1 på sig selv og φ_2 af e_2 på sig selv, som begge har E_0 som fikspunkt. Antag φ_1 og φ_2 bestemt ved matrixligninger med hensyn til koordinatsystemerne $(E_0, E_2; E_{02})$ på e_1 og $(E_0, E_1; E_{01})$ på e_2, hvor E_{02} og E_{01} betegner projektionerne af E henholdsvis fra E_1 på e_1 og fra E_2 på e_2.

Vis, at der findes netop én projektiv kollineation φ af planen, hvis restriktioner til e_1 og e_2 er henholdsvis φ_1 og φ_2.

Angiv nødvendige og tilstrækkelige betingelser, som φ_1 og φ_2 må opfylde, for at φ er en elation.

Opgave nr. 2.

I det reelle projektive rum er valgt et koordinatsystem $(E_0, E_1, E_2, E_3; E)$. Vis, at med hensyn til dette er

$$bx_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_2x_3 - 2x_3x_1 - 2x_1x_2 = 0$$

for hvert reelt tal $b \neq 0$ ligning for en ikke-udartet kvadrik K_b.

(Opgaven fortsætter)

Bestem fællesmængden for K_b og hver af de tre fundamentalplaner, som går gennem E_0. Gør rede for, at disse tre planer er tangentplaner til K_b, og angiv røringspunkterne. Angiv endvidere de værdier af b, for hvilke kvadrikken K_b er oval, og de værdier, for hvilke den er retlinet. Beskriv for hvert $b \in \mathring{R}\setminus\{0\}$ beliggenheden af fundamentaltetraedrets kanter i forhold til K_b.

Find fællesmængden for kvadrikkerne K_b, $b \in \mathring{R}\setminus\{0\}$, og vis, at de har fælles tangentplan i hvert af fællesmængdens punkter.

Bestem de punkter i rummet, der hvert har samme polar med hensyn til alle kvadrikker K_b. Vis, at der findes tetraedre, som er selvpolære med hensyn til alle kvadrikker K_b, og at disse tetraedre har et fælles hjørne.

Opgave nr. 3.

En rumkurve H beliggende på enhedskuglefladen med centrum O er givet ved den naturlige parameterfremstilling af klasse C^2

$$\overrightarrow{OP}(\sigma) = \underline{n}(\sigma), \qquad |\underline{n}(\sigma)| = 1, \qquad \sigma \in J,$$

hvor $J \subseteq \mathring{R}$ er et åbent interval. Differentiation med hensyn til σ angives ved $\dot{}$ over det pågældende funktionstegn.

Gør rede for, at der for $\sigma \in J$ gælder

$$\ddot{\underline{n}} = -\underline{n} + \gamma\, \underline{n} \times \dot{\underline{n}},$$

hvor $\gamma = [\underline{n}, \dot{\underline{n}}, \ddot{\underline{n}}]$ er kurvens geodætiske krumning med hensyn til kuglefladen.

(Opgaven fortsætter)

Det forudsættes nu yderligere, at funktionen

$$\varphi(\sigma) = \int_a^\sigma \gamma(\tau)d\tau , \qquad \sigma \in J ,$$

for et fast a $\in$ J tilfredsstiller ulighederne $-\frac{1}{2}\pi < \varphi(\sigma) < \frac{1}{2}\pi$. For en given kontinuert funktion $\omega : J \to \dot{R}_+$ betragtes rumkurven K med parameterfremstillingen

$$\overrightarrow{OQ}(t) = \int_a^t \frac{1}{\omega(\sigma)}\Big(-\,\underline{\dot{n}}(\sigma)\cos\varphi(\sigma) + \underline{n}(\sigma)\times\underline{\dot{n}}(\sigma)\sin\varphi(\sigma)\Big)\,d\sigma ,$$

$$t \in J,$$

Bestem buelængden s på K regnet ud fra det til t = a svarende punkt O, og vis, at den naturlige parameterfremstilling af K med s som parameter tilhører klassen C^2. Bestem krumningen af K i det til t $\in$ J svarende punkt, og vis, at $\underline{n}(t)$ er hovednormalvektor for K i dette punkt, altså at H er det sfæriske hovednormalbillede af K.

[Man kan benytte, at der for vektorer $\underline{a}$, $\underline{b}$ og $\underline{c}$ i rummet gælder $\underline{a}\times(\underline{b}\times\underline{c}) = (\underline{a}\cdot\underline{c})\underline{b} - (\underline{a}\cdot\underline{b})\underline{c}$.]

Opgave nr. 4.

Et fladestykke F har en regulær parameterfremstilling af klasse C^3 med parameterområde Ω . Parametrene betegnes u^1 og u^2. Det forudsættes, at u^1 er naturlig parameter for hver af u^1-kurverne, og at u^2 er naturlig parameter for hver af u^2-kurverne.

Vis, at dette er ensbetydende med, at der for den metriske fundamentalforms koefficienter g_{ij} gælder

$$g_{11}(u^1,u^2) = 1, \qquad g_{22}(u^1,u^2) = 1, \qquad \text{for} \quad (u^1,u^2) \in \Omega .$$

(Opgaven fortsætter)

Københavns universitet

Matematik 3. Vinteren 1967/68.

Find parameterkurvernes geodætiske krumninger udtrykt ved g_{ij} og Christoffelsymbolerne Γ^k_{ij}, og slut, at alle parameterkurver er geodætiske kurver, hvis og kun hvis

$$\Gamma^2_{11}(u^1,u^2) = 0, \qquad \Gamma^1_{22}(u^1,u^2) = 0 \quad \text{for} \quad (u^1,u^2) \in \Omega .$$

Vis, at dersom dette er tilfældet, vil g_{12}, og dermed vinklen mellem parameterkurverne, være konstant, og der findes en isometrisk afbildning af F på et område i den euklidiske plan.