Københavns Universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen

Sommeren 1967

Matematik 3

Skriftlig prøve
Alle hjælpemidler er tilladt

En besvarelse betragtes som fuldstændig, hvis tre af nedenstående opgaver er korrekt løste.

Opgave nr. 1.

I den reelle projektive plan er valgt et koordinatsystem $(E_0, E_1, E_2; E)$. Der betragtes de ikke-udartede keglesnit K, der går gennem punkterne E_0, E_1, E_2 og E. Mængden af disse keglesnit betegnes $\{K\}$.

1° Opstil betingelser, som koefficienterne $b_{ij} = b_{ji}$, $i, j = 0, 1, 2$, opfylder, hvis og kun hvis keglesnittet med

$$\sum_{i,j=0}^{2} b_{ij} x_i x_j = 0$$

som ligning tilhører $\{K\}$.

2° Vis (direkte eller med benyttelse heraf), at trekanten med vinkelspidser $E_{12}(0,1,1)$, $E_{20}(1,0,1)$ og $E_{01}(1,1,0)$ er selvpolær med hensyn til alle keglesnit i $\{K\}$.

3° Find, udtrykt ved koefficienterne b_{ij} i ligningen for $K \in \{K\}$, et koordinatsæt for polen P_K med hensyn til K for koordinatsystemets enhedslinie.

4° Vis, at P_K for alle $K \in \{K\}$ ligger på samme keglesnit, og at dette rører fundamentaltrekantens sider i punkterne E_{12}, E_{20} og E_{01}.

(Opgavesættet fortsætter)

Københavns Universitet

Mat.3, sommeren 1967.

Opgave nr. 2.

I det reelle projektive rum betragtes den retlinede kvadrik, der med hensyn til et valgt koordinatsystem $(E_0, E_1, E_2, E_3; E)$ har $x_0 x_1 - x_2 x_3 = 0$ som ligning.

Find for hver kant $E_i \vee E_j$, $i \neq j$, i fundamentaltetraedret et koordinatsæt for dens eventuelle skæringspunkt F_{ij} med en af frembringerne gennem E.

Der findes rumlige sekskanter med vinkelspidser blandt punkterne E_0, E_1, E_2, E_3, E og F_{ij} således, at to på hinanden følgende sider i en sådan tilhører hver sin frembringerskare. Vælg en sådan sekskant, og vis (direkte eller ved koordinatregning), at modstående vinkelspidsers forbindelseslinier går gennem samme punkt.

Opgave nr. 3.

I planen er valgt et sædvanligt retvinklet koordinatsystem. En kurve K er med hensyn til dette givet ved parameterfremstillingen

$$\begin{aligned} x_1 &= \tfrac{1}{2}(\cos t \cosh t + \sin t \sinh t) \\ x_2 &= \tfrac{1}{2}(\sin t \cosh t - \cos t \sinh t) \end{aligned} \qquad t \in \,]-\infty,\infty[.$$

1° Vis, at K har netop ét singulært punkt, nemlig det til $t = 0$ svarende. Find buelængden s som funktion af t, regnet ud fra dette punkt.

2° Find en naturlig ligning for den regulære delkurve K_+, der svarer til intervallet $]0,\infty[$.

(Opgaven fortsætter)

3° Find endvidere en naturlig ligning for evolutten af K_+.

4° Vis, at denne evolut er kongruent med en af afviklerne af K_+.

Opgave nr. 4.

Der er givet en rumkurve K ved den naturlige parameterfremstilling $P(u^1)$, $u^1 \in\,]a,b[$, tilhørende klassen C^4. Kurvens krumning og torsion antages positive for $u^1 \in\,]a,b[$. Med F betegnes den retlinede flade, hvis frembringere er kurvens binormaler.

Lad $\underline{a}(u^1)$, $u^1 \in\,]a,b[$, være en enhedsvektor, der er en funktion af klassen C^2. Idet $(0,\underline{e}_1,\underline{e}_2,\underline{e}_3)$ er et valgt sædvanligt retvinklet koordinatsystem, betegnes med G den retlinede flade med parameterfremstilling

$$\vec{0Q}(u^1,u^2) = u^1\underline{e}_3 + u^2\underline{a}(u^1), \qquad u^1 \in\,]a,b[, \quad u^2 \in\,]-\infty,\infty[.$$

Vis, at $\underline{a}(u^1)$, $u^1 \in\,]a,b[$, kan bestemmes således, at der findes en isometrisk afbildning af F på G.

Gennemfør bestemmelsen af $\underline{a}(u^1)$ for det tilfælde, at K er skruelinien med parameterfremstillingen

$$\begin{aligned} x_1 &= R \cos t \\ x_2 &= R \sin t \qquad\qquad t \in\,]-\infty,\infty[, \\ x_3 &= ht \end{aligned}$$

hvor $R \in \dot{R}_+$ og $h \in \dot{R}$ er givet.