Københavns universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen

Vinteren 1966/67

Matematik 3

Skriftlig prøve

Alle hjælpemidler er tilladt

En besvarelse betragtes som fuldstændig, hvis tre af nedenstående opgaver er korrekt løste.

Opgave nr. 1.

Lad l være en linie i den projektive plan. En projektivitet $\varphi: l \to l$ er med hensyn til et projektivt koordinatsystem på l bestemt ved matricen

$$\underline{\underline{S}} = \begin{pmatrix} s_{00} & s_{01} \\ s_{10} & s_{11} \end{pmatrix} .$$

1° Opstil en relation mellem matricens elementer, som er opfyldt, hvis og kun hvis φ er parabolsk, dvs. har netop ét fixpunkt, eller er den identiske afbildning.

2° Vis med benyttelse af et passende valgt koordinatsystem, at der til tre indbyrdes forskellige punkter A,A' og F på l findes netop én parabolsk projektivitet φ, ved hvilken $\varphi(A) = A'$ og $\varphi(F) = F$.

3° Vis, at denne projektivitet φ er restriktionen til l af netop én projektiv kollineation φ' af planen, ved hvilken $\varphi'(B) = B$ og $\varphi'(m) = m$, hvor B er et givet punkt uden for l og m en given linie gennem F, som er forskellig fra både l og linien FB. Gør rede for, at φ' er en elation.

Opgave nr. 2.

I den projektive plan er valgt et koordinatsystem. Et keglesnit har med hensyn til dette

$$x_0^2 + x_2^2 - 4x_0x_1 + 6x_1x_2 = 0$$

som en ligning.

Find ligninger for polaren for punktet med koordinatsættet $(11,-1,16)$ samt for de tangenter til keglesnittet, der går gennem dette punkt.

Opgave nr. 3.

Om en rumkurve K forudsættes, at en naturlig parameterfremstilling $\overrightarrow{OP} = \underline{x}(s)$, $s \in J$, hvor J betegner et åbent interval og 0 et fast punkt, tilhører klassen C^4, og at dens krumning $\kappa(s)$ og torsion $\tau(s)$ er positive for $s \in J$. Tangent-, hovednormal- og binormalvektoren i det til s svarende punkt på K betegnes henholdsvis $\underline{v}_1(s)$, $\underline{v}_2(s)$ og $\underline{v}_3(s)$.

Med B betegnes kurvens binormalbillede, dvs. kurven med parameterfremstillingen $\overrightarrow{OQ} = \underline{v}_3(s)$, $s \in J$. Find udtrykt ved κ, τ, $\underline{v}_1$, $\underline{v}_2$, $\underline{v}_3$ for det til parameterværdien s svarende punkt Q på B:

1° tangentvektoren $\underline{w}_1$ og buelængden σ på B fra det til et valgt $s_o \in J$ svarende punkt Q_o til Q,

2° krumningen κ_B og hovednormalvektoren $\underline{w}_2$,

3° binormalvektoren $\underline{w}_3$,

4° den geodætiske krumning κ_{Bg} af B betragtet som kurve på enhedskuglen med centrum O.

Københavns universitet

Matematik 3. Vinteren 1966/67.

Opgave nr. 4.

En flade er med hensyn til et sædvanligt retvinklet koordinatsystem i rummet bestemt ved parameterfremstillingen

$$x_1 = u^1$$
$$x_2 = u^2 \qquad\qquad u^1, u^2 \in \,]0,\pi[.$$
$$x_3 = \log \sin u^1 - \log \sin u^2$$

1° Find fladens to fundamentalformer samt krumningsmålet og middelkrumningen i et vilkårligt fladepunkt.

2° Angiv differentialligningen for fladens asymptotekurver, og vis, at den kurve i x_1x_2-planen, som er bestemt ved ligningen

$$\log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}x_1 - \log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}x_2 = c, \qquad x_1, x_2 \in \,]0,\pi[,$$

hvor c betegner en vilkårlig konstant, er den retvinklede projektion på denne plan af en af fladens asymptotekurver.