TIL HØRER MATEMATISK BIBLIOTEK - MÅ IKKE FJERNES!

Københavns Universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen

Sommeren 1966

Matematik 3

Skriftlig prøve
Alle hjælpemidler er tilladt

En besvarelse betragtes som fuldstændig, hvis tre af nedenstående opgaver er korrekt løste.

Opgave nr. 1.

I den projektive plan er givet et koordinatsystem $(E_0, E_1, E_2; E)$. Med E_{12} betegnes skæringspunktet mellem linierne E_1E_2 og E_0E.

En projektiv kollineation φ af den projektive plan afbilder E_0 på E, E_1 på E_2, E_2 på E_1 og E på det fjerde harmoniske punkt P til E_0, E_{12}, E.

Vis, at φ har præcis tre fixpunkter og find koordinatsæt for disse.

Vis, at $\varphi \circ \varphi$ er en homologi og find koordinatsæt for homologicentret og homologiaksen.

Opgave nr. 2.

I den projektive plan er givet et koordinatsystem $(E_0, E_1, E_2; E)$. Med E_{01}, E_{12}, E_{20} betegnes skæringspunktet mellem henholdsvis linierne E_0E_1 og E_2E, E_1E_2 og E_0E, E_2E_0 og E_1E.

Find polarerne for punkterne E_0, E_1, E_2, E ved polariteten hørende til et keglesnit, som indeholder punkterne E_{01}, E_{12}, E_{20} og i disse har linierne E_0E_1, E_1E_2, E_2E_0 som tangenter. Vis herved, at der findes højst ét keglesnit K med de anførte egenskaber.

Vis, at der findes et sådant keglesnit K og find en ligning for K i det givne koordinatsystem.

(fortsættes)

Opgave nr. 3.

I planen er givet et sædvanligt retvinklet koordinatsystem $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2)$. Med K betegnes hyperbelgrenen med ligning

$$x_2^{\,2} = x_1^{\,2} + 1 \;, \quad x_2 > 0 \;.$$

Kurven K orienteres således, at tangentvektoren i ethvert kurvepunkt har positiv førstekoordinat.

Vis, at der til hver værdi af Θ i intervallet $-\pi/4 < \Theta < \pi/4$ findes præcis ét kurvepunkt $P(\Theta)$, således at Θ er tangentdrejningen i $P(\Theta)$, regnet ud fra tangenten i punktet $(0,1)$, og find koordinaterne for $P(\Theta)$ som funktioner af Θ.

Vis, at kurvens tangent i punktet $P(\Theta)$ er parallel med den linie, som fremgår af linien $OP(\Theta)$ ved spejling i linien $x_1 = x_2$.

Find krumningen af kurven K i punktet $P(\Theta)$ som funktion af Θ.

Vis, at koordinatsættene for punkterne på K's evolut præcis er de løsninger til ligningen

$$x_2^{\,2/3} = x_1^{\,2/3} + 2^{2/3} \;,$$

for hvilke $x_2 > 0$.

Opgave nr. 4.

I rummet er givet et sædvanligt retvinklet koordinatsystem $(O, \underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3)$. Idet F betegner omdrejningscylinderfladen

$$x_1^{\,2} + x_2^{\,2} = 1$$

og G kuglefladen

$$(x_1 - 1)^2 + x_2^{\,2} + x_3^{\,2} = 1 \;,$$

betegner K skæringskurven mellem F og G. Fladerne F og G orienteres således, at de begge har overalt positiv middelkrumning.

Find normalvektorerne for F og G i punktet P $(1/2\ ,\ \sqrt{3}/2,\ 0)$.

Find herved tangentvektoren for K i punktet P (svarende til en valgt gennemløbsretning på K).

Bevis (f.eks. ved en geometrisk betragtning), at normalkrumningerne κ_n^F og κ_n^G i punktet P for K, opfattet som kurve på fladen F henholdsvis på fladen G, er 0 henholdsvis 1.

Find krumningen og hovednormalvektoren for kurven K i punktet P.

Opgave nr. 5.

På en flade X (dvs. en sammenhængende 2-dimensional differentiabel mangfoldighed) er givet to C^∞-tangentvektorfelter ξ_1 og ξ_2, således at feltvektorerne for ξ_1 og ξ_2 er lineært uafhængige i ethvert punkt $x \in X$.

Lad (u^1,u^2) betegne tilladte lokale koordinater i X med domæne $U \subseteq X$ og ξ_i^j og a_i^j de ved

$$\xi_i = \xi_i^j \frac{\partial}{\partial u^j} \quad , \qquad \frac{\partial}{\partial u^i} = a_i^j\, \xi_j$$

definerede C^∞-funktioner på U. Vis, at Lie-produktet $[\xi_1,\xi_2] = 0$ på U når og kun når der gælder

$$\frac{\partial}{\partial u^1}\, a_2^i = \frac{\partial}{\partial u^2}\, a_1^i \ , \quad i = 1,2 \ ,$$

på U.

Vis, at hvis $[\xi_1,\xi_2] = 0$ på X, da findes der i omegnen at ethvert punkt $x \in X$ tilladte lokale koordinater (v^1,v^2), således at

$$\frac{\partial}{\partial v^1} = \xi_1 \quad , \quad \frac{\partial}{\partial v^2} = \xi_2 \ .$$