Mat. 3. Vinteren 1964-65

Københavns universitet.

Naturvidenskabelig embedseksamen

Vinteren 1964-65

Matematik 3

Skriftlig prøve

Alle sædvanlige hjælpemidler er tilladt.

En besvarelse betragtes som fuldstændig, hvis to af opgaverne 1, 2, 3 og to af opgaverne 4, 5, 6 er korrekt løste.

Opgave nr. 1.

Bestem for enhver kvaternion a mængden af kvaternioner x, for hvilke $x^2 = a$.

Opgave nr. 2.

I den reelle projektive plan er givet fire punkter A_0, A_1, A_2 og A_3, hvoraf hvilketsomhelst tre ikke ligger på linie. Med φ betegnes den projektive kollineation af den reelle projektive plan, som er fastlagt ved at $\varphi(A_0) = A_1$, $\varphi(A_1) = A_2$, $\varphi(A_2) = A_3$ og $\varphi(A_3) = A_0$.

Vis, at skæringspunktet P_0 mellem linierne A_0A_2 og A_1A_3 er fixpunkt ved φ, og at skæringspunkterne P_1 mellem linierne A_0A_1 og A_2A_3 og P_2 mellem linierne A_0A_3 og A_1A_2 ombyttes ved φ.

Vis, at φ^2 er en involutorisk homologi og angiv dens homologicentrum og homologilinie.

Find koordinatsæt til punkterne A_2, A_1 og A_3 samt en matrixligning for φ i koordinatsystemet $(P_0, P_1, P_2; A_0)$.

(fortsættes)

Mat. 3. Vinteren 1964-65

Opgave nr. 3.

I den reelle projektive plan er givet seks punkter A_1, A_2, A_3, B_1, B_2 og B_3, hvoraf hvilketsomhelst tre ikke ligger på linie. Vis, at der findes en homologi af den reelle projektive plan, som afbilder A_1 på B_1, A_2 på B_2 og A_3 på B_3, når og kun når linierne A_1B_1, A_2B_2 og A_3B_3 går gennem samme punkt, og vis, at der da findes præcis én sådan homologi.

Vis, at homologien er involutorisk når og kun når det yderligere gælder, at skæringspunkterne mellem linierne A_1B_2 og A_2B_1, mellem linierne A_1B_3 og A_3B_1 og mellem linierne A_2B_3 og A_3B_2 ligger på homologilinien.

Opgave nr. 4.

En orienteret regulær kurve af klasse C^3 i en orienteret plan kan beskrives ved en naturlig parameter s med parameterinterval $-\infty < s < \infty$, således at der gælder

$$-\frac{\pi}{2} < \Theta(s) < \frac{\pi}{2} \qquad \text{og} \qquad \kappa(s) = \cos^3 \Theta(s)$$

for enhver værdi af s, idet $\kappa(s)$ betegner kurvens krumning og $\Theta(s)$ dens tangentdrejning regnet ud fra det til $s = 0$ svarende kurvepunkt.

Vis, at kurven er en parabel. (Benyt $t = \operatorname{tg} \Theta(s)$ som parameter).

(fortsættes)

Mat 3. Vinteren 1964-65

Opgave nr. 5.

Et regulært orienteret fladestykke F af klasse C^3 i det orienterede euklidiske rum kan beskrives ved en parameterfremstilling med parametre (u^1, u^2) og parameterområde

$$\Omega = \{(u^1, u^2) \mid -\infty < u^1 < \infty \wedge -\tfrac{\pi}{2} < u^2 < \tfrac{\pi}{2}\}.$$

Med denne parameterfremstilling har koefficienterne i fladestykkets to fundamentalformer følgende værdier:

$$g_{11} = g_{22} = 1, \; g_{12} = g_{21} = 0,$$
$$L_{11} = L_{12} = L_{21} = 0, \; L_{22} = 1.$$

Vis, at u^1-kurverne er et system af parallelle rette linier.

Vis, at enhver u^2-kurve ligger i en plan vinkelret på disse linier.

Find u^2-kurvernes form, og giv en geometrisk beskrivelse af fladestykket F.

Opgave nr. 6.

En kurve K er i sædvanlige retvinklede koordinater (x_1, x_2, x_3) i rummet givet ved parameterfremstillingen

$$x_1 = 6^{-\frac{1}{2}} s \cos(2^{\frac{1}{2}} \ln s)$$
$$x_2 = 6^{-\frac{1}{2}} s \sin(2^{\frac{1}{2}} \ln s) \qquad 0 < s < \infty$$
$$x_3 = 2^{-\frac{1}{2}} s.$$

Vis, at s er en naturlig parameter på kurven, og find dennes tangentvektor og krumning som funktioner af s.

I en plan Π er givet sædvanlige retvinklede koordinater (ξ_1, ξ_2) og kurven K' med parameterfremstillingen

$$\xi_1 = e^t \cos t \qquad -\infty < t < \infty.$$
$$\xi_2 = e^t \sin t$$

Vis, at tangentfladen til K kan udfoldes i planen Π således at K overføres i K'.