Mat. 3. Sommeren 1964

Københavns Universitet.

Naturvidenskabelig embedseksamen

Sommeren 1964.

Matematik 3

Skriftlig prøve

Alle hjælpemidler er tilladt.

En besvarelse betragtes som fuldstændig, hvis to af opgaverne 1, 2, 3 og to af opgaverne 4, 5, 6 er korrekt løste.

Opgave nr. 1.

Bestem **løsningsmængden til ligningssystemet**

$$ix - yk = -k$$

$$xk + jy = i ,$$

idet x og y betegner kvaternioner og 1, i, j og k kvaternionenhederne.

Opgave nr. 2.

I den reelle projektive plan Π^2 er givet et projektivt punktkoordinatsystem $(E_0,E_1,E_2;E)$. Med φ betegnes den projektive kollineation af Π^2 på sig selv, som med hensyn til det givne koordinatsystem bestemmes ved matrixligningen

$$\begin{pmatrix} x_0' \\ x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} .$$

Vis, at φ er involutorisk.

Vis, at φ er en homologi og find et punktkoordinatsæt for dens

(fortsættes)

Mat. 3. Sommeren 1964

homologicentrum og et liniekoordinatsæt for dens homologilinie. Bestem en matrixligning for φ i koordinatsystemet $(F_0, F_1, F_2; F)$, hvor $F_0 = \varphi(E_0)$, $F_1 = \varphi(E_1)$, $F_2 = \varphi(E_2)$ og $F = \varphi(E)$.

Opgave nr. 3.

Om en projektivitet ψ af en reel projektiv linie Π^1 forudsættes, at $\psi\circ\psi\circ\psi$ er den identiske afbildning af Π^1.

Vis, at hvis $A_0 \in \Pi^1$ ikke er fixpunkt ved ψ, da er punkterne A_0, $A_1 = \psi(A_0)$ og $A = \psi(A_1)$ indbyrdes forskellige, og find for et sådant punkt A_0 en matrixligning for ψ i koordinatsystemet $(A_0, A_1; A)$

Vis, at hvis ψ er forskellig fra den identiske afbildning af Π^1, da er ψ fixpunktfri.

Om en fra den identiske afbildning forskellig projektiv kollineation φ af den reelle projektive plan Π^2 forudsættes, at $\varphi\circ\varphi\circ\varphi$ er den identiske afbildning af Π^2. Vis, at φ har netop én fixlinie og netop ét fixpunkt.

Opgave nr. 4.

En orienteret kurve K i en orienteret plan har naturlig ligning

$$\kappa(s) = (a^2 + s^2)^{-\frac{1}{2}}, \quad -\infty < s < \infty,$$

hvor a er en positiv konstant.

Vis, at $s = a \sinh \Theta$, idet $\Theta = \Theta(s)$ betegner kurvens tangentdrejning ud fra tangenten i det til $s = 0$ svarende kurvepunkt P_0.

I planen vælges et sædvanligt retvinklet koordinatsystem i over-

(fortsættes)

Mat. 3. Sommeren 1964

$$x_1 = \sqrt{2}\cos(t\sqrt{2})\cos t + \sin(t\sqrt{2})\sin t$$

$$x_2 = \sqrt{2}\sin(t\sqrt{2})\cos t - \cos(t\sqrt{2})\sin t$$

$$x_3 = 0$$

og $\underline{a}(t)$ vektoren med koordinatsættet

$$\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cos(t\sqrt{2}),\ \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(t\sqrt{2}),\ \frac{\sqrt{2}}{2}\right).$$

Bestem (som funktioner af t) en naturlig parameter s og tangentvektoren $\underline{v}_1$ for den af P(t) beskrevne kurve.

Vis, at den retliniede flade F, som beskrives af den linie l(t), som går gennem punktet P(t) og indeholder vektoren $\underline{a}(t)$, er vridningsfri (Torse).

Vis, at F er en tangentflade og find en parameterfremstilling for dens spidskant (Gratlinie).