Mat.3. Vinteren 1963-64

Københavns Universitet.

Naturvidenskabelig embedseksamen

Vinteren 1963-64.

Matematik 3

Skriftlig prøve

Alle hjælpemidler er tilladt.

En besvarelse betragtes som fuldstændig, hvis to af opgaverne 1, 2, 3 og to af opgaverne 4, 5, 6 er korrekt løste.

Opgave nr. 1.

Bestem for enhver kvaternion $a \neq 0$ mængden af de kvaternioner x, for hvilke $ax = xa$, og mængden af de kvaternioner y, for hvilke $ay = -ya$.

Opgave nr. 2.

I en projektiv plan er givet 3 linier a, b og c, som ikke går gennem samme punkt, samt 3 punkter A, B og C, som ikke ligger på samme linie og som alle ligger uden for linierne a, b og c. Det forudsættes endvidere, at linien BC går gennem skæringspunktet mellem b og c, at linien CA går gennem skæringspunktet mellem c og a, og at linien AB går gennem skæringspunktet mellem a og b.

Projektionen fra A af b på c, projektionen fra B af c på a og projektionen fra C af a på b betegnes med henholdsvis $\varphi: b \to c$, $\psi: c \to a$, $\chi: a \to b$. Vis, at $\chi \circ \psi \circ \varphi$ er den identiske afbildning $e: b \to b$.

Formuler den duale sætning.

(fortsættes)

Opgave nr. 3.

I en reel projektiv plan Π^2 er valgt et punktkoordinatsystem $(E_0, E_1, E_2; E)$. En projektiv kollineation $\varphi: \Pi^2 \to \Pi^2$ er bestemt ved, at den afbilder E på sig selv og hvert fundamentalpunkt på dettes projektion fra E på fundamentaltrekantens modstående side.

Opstil en matrixligning for φ. Bestem samtlige fixpunkter ved φ og de linier, der ved φ afbildes på sig selv.

Det antages, at Π^2 er fremkommet af en euklidisk plan ved tilføjelse af de uegentlige punkter. Det forudsættes, at fundamentalpunkterne er egentlige, og at E er medianernes skæringspunkt i fundamentaltrekanten. Beskriv φ i dette tilfælde.

Opgave nr. 4.

En rumkurve er givet ved parameterfremstillingen

$x_1 = 2^{-\frac{1}{2}} \cosh t, \quad x_2 = 2^{-\frac{1}{2}} \sinh t, \quad x_3 = 2^{-\frac{1}{2}} t, \quad t \in \mathbb{R}.$

Find en naturlig parameterfremstilling for kurven, og beregn dens krumning og torsion.

Find kurvens sfæriske tangentbillede.

Opgave nr. 5. $\kappa > 0$!! og $1 + \left(\frac{\tau}{\kappa}\right)' \neq 0$.

Om den naturlige parameterfremstilling $\underline{x} = \underline{x}(s)$ for en rumkurve, hvor s varierer i et interval J, forudsættes, at den har kontinuerte afledede op til fjerde orden. Til hvert $s \in J$ lades svare den rette linie $l(s)$, som er parallel med kurvetangenten i det til s svarende kurvepunkt, og som skærer binormalen hørende til dette punkt i binormalvektorens endepunkt, idet denne tænkes afsat fra kurvepunktet.

Vis, at linierne $l(s)$, $s \in J$, frembringer en udfoldelig flade, og find en parameterfremstilling for dennes spidskant (gratlinie).

(fortsættes)

Opgave nr. 6.

En omdrejningsparaboloide er i sædvanlige retvinklede koordinater givet ved parameterfremstillingen

$$x_1 = u^1, \quad x_2 = u^2, \quad x_3 = \tfrac{1}{2}((u^1)^2 + (u^2)^2), \quad (u^1,u^2) \in R^2.$$

Find fladens første og anden fundamentalform og hovedkrumningerne i det til $(u^1,u^2) = (a,0)$ svarende fladepunkt A, hvor $a \neq 0$ er et givet tal.

Find den geodætiske krumning af parallelcirklen gennem A.

Tangentvektoren i A til parallelcirklen parallelforskydes langs denne i Levi-Civitas forstand tilbage til udgangspunktet A. Bestem vinklen mellem den oprindelige og den parallelforskudte vektor.