Københavns Universitet

Naturvidenskabelig embedseksamen

Sommeren 1963

Matematik 3

Skriftlig prøve

Alle hjælpemidler er tilladt.

En besvarelse betragtes som fuldstændig, hvis to af opgaverne 1, 2, 3 og to af opgaverne 3, 4, 5 er korrekt løste.

Opgave nr. 1.

I en projektiv plan Π^2 er givet to forskellige punkter A og B, tre indbyrdes og fra linien AB forskellige linier a_1, a_2, a_3 gennem A og tre indbyrdes og fra linien AB forskellige linier b_1, b_2, b_3 gennem B. Skæringspunktet mellem a_i og b_j betegnes C_{ij}, $i,j = 1,2,3$. Der gælder da, at linierne $C_{12}C_{21}$, $C_{31}C_{13}$ og $C_{23}C_{32}$ går gennem samme punkt.

Bevis denne sætning (f.eks. ved at inddrage dualitetsprincippet for planen).

Planen Π^2 antages at være en lineær mangfoldighed i et tredimensionalt projektivt rum. Formuler sætningen, der fås af den nævnte ved anvendelse af dualitetsprincippet for rummet.

Opgave nr. 2.

Lad A,B,C,D,E være indbyrdes forskellige punkter på en linie l i den reelle projektive plan. Gennem hvert af punkterne A,B,C lægges en fra l forskellig linie, henholdsvis a,b,c, således at disse tre linier ikke går gennem samme punkt. Skæringspunktet mellem b og c, mellem c og a og mellem a og b betegnes med henholdsvis P,Q og R. Linien DQ skærer b i S, linien EP skærer a i T, og linien ST skærer l i F.

Bevis, at

$$df(ABCF) = df(ABCD)\ df(ABCE),$$

enten ved hjælp af sætninger om centralprojektion og dobbeltforhold eller ved atfiguren tænkes beliggende i den euklidiske plan med b som uegentlig linie.

Opgave nr. 3.

I en projektiv plan Π^2 er givet tre punkter E_0, E_1, E_2, som ikke ligger på samme linie, og en linie E^*, som ikke går gennem noget af disse punkter, endvidere tre punkter F_0, F_1, F_2, som ikke ligger på ret linie, og en linie F^*, som ikke går gennem noget af disse punkter.

Vis, at der findes en og kun én projektiv kollineation $\varphi : \Pi^2 \to \Pi^2$, ved hvilken E_0, E_1, E_2 og E^* afbildes på henholdsvis F_0, F_1, F_2 og F^*.

Med hensyn til det projektive koordinatsystem med fundamentalpunkterne E_0, E_1, E_2 og enhedslinien E^* har punkterne F_0, F_1, F_2 henholdsvis koordinatsættene (f_{00}, f_{10}, f_{20}), (f_{01}, f_{11}, f_{21}), (f_{02}, f_{12}, f_{22}), og F^* har liniekoordinatsættet (v_0, v_1, v_2). Find en matrixligning for φ.

Opgave nr. 4.

Om en given rumkurve k med den naturlige parameterfremstilling

$$\underline{x} = \underline{x}(s) \qquad a < s < b,$$

der antages 5 gange kontinuert differentiabel, forudsættes, at der for krumningen κ og torsionen τ gælder

$$\begin{aligned} &\kappa(s) > 0, \\ &\tau(s) < 0, \qquad a < s < b. \\ &\kappa(s) + \tau(s) = 1, \end{aligned}$$

Med k^* betegnes kurven med paramterfremstillingen

$$\underline{y} = \underline{x}(s) + \underline{v}_2(s), \qquad a < s < b,$$

hvor $\underline{v}_2$ er hovednormalvektoren til k.

Find vinklen mellem tangentvektorerne til k og k^* i punkterne, der svarer til samme parameterværdi s.

Find hovednormalvektoren til k^* samt denne kurves krumning og torsion.

Opgave nr. 5.

Den naturlige parameterfremstilling $\underline{x} = \underline{x}(s)$ for en kurve i planen er kontinuert differentiabel for $s \geqq 0$ og 2 gange kontinuert differentiabel for $s > 0$. Kurvens krumning er

$$\kappa(s) = \frac{1}{\sqrt{s}}, \qquad s > 0 .$$

Vis, at kurvens evolut er en cirkel.

Opgave nr. 6.

En rumkurve er givet ved en naturlig parameterfremstilling

$$\underline{y} = \underline{y}(s), \qquad a < s < b,$$

der antages 6 gange kontinuert differentiabel. Det forudsættes, at krumningen er positiv og torsionen en konstant c. Med B betegnes den retlinede flade, der beskrives af kurvens binormaler.

Angiv en parameterfremstilling

$$\underline{x} = \underline{x}(u^1, u^2)$$

for B, idet $u^1 = s$ og en koordinat u^2 på binormalerne benyttes som parametre.

Vis, at B ikke er udfoldelig, når $c \neq 0$.

Find den metriske fundamentalform $g_{ij}du^i du^j$ for B.

For hvert reelt tal h betegnes med V_h den ved parameterfremstillingen

$$\begin{aligned} x_1 &= v^2 \cos v^1, & -\infty < v^1 < \infty, \\ x_2 &= v^2 \sin v^1, & -\infty < v^2 < \infty, \\ x_3 &= h v^1 , \end{aligned}$$

bestemte vindelflade. Vis, at hvis $c \neq 0$, findes der en isometrisk afbildning af B ind i én af disse vindelflader.