Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet vinter 1999–2000

Matematik 2 SS

gammelt pensum

Opgaver til besvarelse i 3 timer.

Alle hjælpemidler er tilladte.

Opgavesættet består af 3 opgaver og er på 2 sider.

Opgave 1

Fire kort udtrækkes tilfældigt fra et sædvanlig sæt spillekort (52 kort ialt, fordelt på de fire farver ruder, hjerter, kløer og spar med 13 kort i hver farve).

Lad X betegne antallet af farver, der er repræsenteret blandt de udtrukne kort og bestem X's fordeling.

Alle sandsynligheder, der angives, skal dels angives præcist som brøker (eventuelt indeholdende binomialkoefficienter), dels angives approksimativt, f.eks. som en heltallig procentværdi. Tillige er det vigtigt, at det klart fremgår, hvilke principper der anvendes ved beregningerne.

Opgave 2

Lad $x_1, \cdots, x_n$ være en stikprøve af størrelse n fra en fordeling med tæthedsfunktion $f(x) = \sqrt{\theta/\pi}\, e^{-\theta x^2}$; $x \in \mathbb{R}$, hvor θ er en positiv parameter.

(i) Opskriv likelihoodfunktionen for den statistiske model, der herved er beskrevet.

(ii) Bestem maksimaliseringsestimatoren $\widehat{\theta}$.

(iii) Idet det nu antages, at $n = 10$, skal man bestemme det kritiske område for et bedste test på 5% signifikansniveauet af nulhypotesen $H_0 : \theta = \frac{1}{2}$ mod den alternative hypotese $H_1 : \theta = 1$.

Opgave 3

Lad X_1 og X_2 være uafhængige identisk fordelte stokastiske variable med tæthedsfunktion

$$f(x) = xe^{-x};\ 0 < x < \infty.$$

Opgave 3 fortsættes på side 2

(i) Vis, at X_1 og X_2's fælles fordelingsfunktion er givet ved

$$F(x) = 1 - (1 + x)e^{-x}\,;\; x \geq 0$$

og bestem den tilhørende middelværdi.

Sæt $Y_1 = \min(X_1, X_2)$ og $Y_2 = \max(X_1, X_2)$.

(ii) Bestem Y_1 og Y_2's fordelingsfunktioner.

(iii) Beregn $E(Y_1)$ og $E(Y_2)$.

(iv) Begrund, at $E(Y_1) + E(Y_2) = 2E(X_1)$ og kontrollér, at dette stemmer.

(v) Bestem, for $0 < y_1 < y_2 < \infty$ sandsynligheden

$$P(y_1 < Y_1 \leq Y_2 \leq y_2).$$

(vi) Bestem den simultane fordelingsfunktion for (Y_1, Y_2).

Vejledning: Man kan f.eks. se på differensen mellem $P(Y_2 \leq y_2)$ og sandsynligheden fra (v).

(vii) Lad G betegne den i (vi) fundne simultane fordelingsfunktion. Forklar, hvilken sammenhæng der er mellem Y_1's fordelingsfunktion og størrelsen $\lim_{y_2 \to \infty} G(y_1, y_2)$ samt, hvilken sammenhæng der er mellem Y_2's fordelingsfunktion og størrelsen $G(y_2, y_2)$. Kontrollér, at disse sammenhænge virkelig gælder, når man udnytter resultaterne fundet under (ii) og (vi).

(viii) Bevis, at den simultane tæthedsfunktion for (Y_1, Y_2) er givet ved $g(y_1, y_2) = 2y_1y_2e^{-(y_1+y_2)}$; $0 < y_1 < y_2 < \infty$.

Vejledning og kommentar: Man kan enten udnytte resultatet fra (vi) eller direkte udnytte et standard resultat fra noterne. Anvendes den sidst antydede mulighed, kan man vælge at regne opgaven "bagfra", idet de tidligere spørgsmål kan besvares ud fra kendskab til den simultane tæthedsfunktion.