Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet vinteren 1997-98

Matematik 2 SS

Opgaver til besvarelse i 3 timer

Alle hjælpemidler er tilladte.

Opgave 1 (30%)

En urne indeholder $r + s$ brikker, hvoraf r er røde og s sorte. Brikkerne tages frem én ad gangen, indtil der er udtrukket to i træk af samme farve, eller indtil der ikke er flere brikker tilbage. Brikkerne lægges efterhånden som de udtages på et spillebræt med $r + s$ felter, fra venstre mod højre. Vi siger, at "Rød" vinder, hvis der på et tidspunkt udtrækkes to røde i træk uden at der forinden er udtrukket to sorte i træk. Tilsvarende siger vi, at "Sort" vinder, hvis der udtrækkes to sorte i træk før der udtrækkes to røde i træk. Er alle brikker udtaget, uden at der er forekommet to i træk af samme farve, er spillet "uafgjort".

r	s	r	s	r	s	r	r			rød vinder
s	r	s	s							sort vinder
r	s	r	s	r	s	r	s	r	s	uafgjort

Figuren viser tre mulige spilforløb i tilfældet $r = 5$, $s = 5$.

Med $R(r, s)$, hhv. $S(r, s)$ og $U(r, s)$ betegnes sandsynligheden for at hhv. Rød vinder, Sort vinder og spillet ender uafgjort.

(i) Bestem sandsynlighederne $R(r, 2)$, $S(r, 2)$ og $U(r, 2)$ i hvert af tilfældene $r = 2$, $r = 3$ og $r = 4$.

(ii) Bestem $R(r, 2)$, $S(r, 2)$ og $U(r, 2)$ for et vilkårligt $r \geq 4$. *Vejledning:* Bestem $R(r, 2)$ til sidst.

(iii) Lad nu r og s være vilkårlige med $s \leq r$. Lad $1 \leq k \leq s - 1$. Bestem sandsynligheden for at den først udtagne brik er sort og at sort vinder netop som den $2k$'te brik udtages. Bestem også sandsynligheden for at den først udtagne brik er rød og at sort vinder netop som den $(2k + 1)$'te brik udtages.

(iv) Idet det igen antages, at $s \leq r$, skal man vise, at

$$S(r, s) = \sum_{k=1}^{s-1} \frac{r^{(k-1)} s^{(k+1)} (2r + s - 3k + 1)}{(r + s)^{(2k+1)}}, \qquad (*)$$

hvor $n^{(\nu)}$ som sædvanlig betegner $n(n - 1) \cdot \cdots \cdot (n - \nu + 1)$ (med $n^{(0)} = 1$). *Vejledning:* Anvend (iii).

Opgavesættet fortsættes på side 2.

Opgave 2 (35%)

Lad D være mængden af $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ for hvilke $0 < y < x$, og betegn med f funktionen defineret på D ved

$$f(x, y) = 2e^{-x^2}\ ; \quad (x, y) \in D\,.$$

(i) Vis, at f er en 2-dimensional tæthedsfunktion.

I det følgende antages, at den stokastiske vektor (X, Y) har den simultane tæthedsfunktion f.

(ii) Er X og Y uafhængige?

(iii) Bestem fordelingerne af X og Y.

(iv) For hvert $x > 0$ skal man bestemme den betingede fordeling af Y givet $X = x$ og vise, at det drejer sig om en af de kendte fordelinger (hvilken?).

(v) Bestem fordelingen af den stokastiske vektor $(X - Y, Y)$.

(vi) Vis, at $X - Y$ og Y er identisk fordelte. Er disse stokastiske variable uafhængige?

Opgave 3 (35%)

Lad $x_1, \cdots, x_n$ være en stikprøve af størrelse n fra en fordeling med tæthedsfunktion

$$f(x) = \sqrt{\frac{\theta}{\pi}}\, e^{-\theta x^2}\ ; \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Her er θ en positiv parameter.

(i) Opskriv likelihoodfunktionen for den statistiske model, der herved er beskrevet, og foreslå en naturlig sufficient stikprøvefunktion.

(ii) Bestem maksimaliseringsestimatoren $\widehat{\theta}$.

(iii) For $\gamma > 0$ ses på mængden $C_\gamma \subseteq \mathbb{R}^n$ givet ved

$$C_\gamma = \{(x_1, \cdots, x_n) \mid \sum_1^n x_k^2 \leq \gamma\}\,.$$

Vis, at C_γ er det kritiske område for et bedste test af nulhypotesen $H_0 : \theta = \frac{1}{2}$ mod den alternative hypotese $H_1 : \theta = 1$.

(iv) Idet det nu antages, at $n = 10$, skal man bestemme γ (omtrentlig værdi) således, at testet fra (iii) har signifikansniveau 5%. Er dette test også et bedste test af $H_0 : \theta = \frac{1}{2}$ mod $H_1 : \theta > \frac{1}{2}$?

(v) Idet det igen antages, at $n = 10$, skal man nu angive et bedste test på 5% signifikansniveauet af $H_0 : \theta = \frac{1}{2}$ mod $H_1 : \theta < \frac{1}{2}$.