**Københavns Universitet**
**Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet sommer 1999**

# Matematik 2 SS

Opgaver til besvarelse i 3 timer.

Alle hjælpemidler er tilladte.

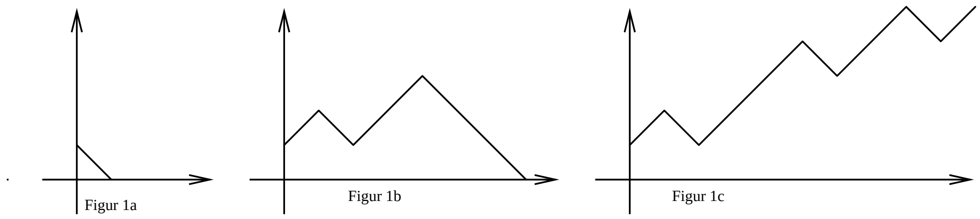
Opgavesættet består af 3 opgaver og er på 2 sider.

## **Opgave 1** (40 point)

En spiller har til tid 0 en kapital på $K_0 = 1$ kr. Han kaster til tid 1 en terning. Viser denne enten ét øje eller to øjne, taber han en krone og er derefter ruineret (kapitalen $K_1$ til tid 1 er 0) og spillet hører op. Viser terningen derimod $3, 4, 5$ eller 6 øjne, vinder spilleren 1 kr. og hans kapital til tid 1 øges til $K_1 = 2$ kr. Spilleren fortsætter på samme vis, sålænge kapitalen er positiv. Hvis kapitalen $K_n$ til tid $n$ er 0, er spilleren ruineret og spillet ophører. Er $K_n > 0$, kastes en terning til tid $n + 1$; viser denne enten ét eller to øjne, taber spilleren en krone, dvs. kapitalen til tid $n + 1$ bliver $K_{n+1} = K_n - 1$, mens $K_{n+1} = K_n + 1$ såfremt terningen viser $3, 4, 5$ eller 6 øjne.

Med $R$ betegnes hændelsen "spilleren bliver ruineret (før eller senere)", dvs. der findes et $n$ så $K_n = 0$, og med $p$ betegnes *ruinsandsynligheden,* dvs. $p = P(R)$. Man kan vise (dette kræves ikke gjort), at $p < 1$.

Spillets forløb kan visualiseres i et diagram, der forbinder punkterne $(n, K_n)$ for alle værdier af $n$ op til et eventuelt ruineringstidspunkt. Således svarer diagrammet i




Figur 1 a til situationen, hvor spilleren ruineres med det samme (dvs. til tid 1), mens Figur 1 b viser et spilforløb, hvor spilleren ruineres til tid 7. Endelig svarer Figur 1 c (tilsyneladende) til et spilforløb, hvor spilleren ikke ruineres.

(i) Bevis, at $p \geq \frac{1}{3}$ og at $p \geq \frac{1}{3} + \frac{2}{27} = \frac{11}{27}$.

(ii) Lad $R_0$ betegne hændelsen, at der findes et $n \geq 0$ således at spilleren øger sin kapital de første $n$ gange, terningen kastes, mens han herefter hele tiden mindsker sin kapital indtil ruin indtræffer (tilfældet $n = 0$ svarer til situationen, hvor $K_1 = 0$). Bestem $P(R_0)$ og bevis herved, at $p \geq \frac{3}{7}$.

(iii) Lad $n$ være et naturligt tal og betegn med $A_n$ hændelsen, der karakteriseres ved følgende krav til $K_1, K_2, \cdots, K_{2n}$:

$$K_1 > 1,\ K_2 > 1, \cdots, K_{2n-1} > 1,\ K_{2n} = 1$$


Opgave 1 fortsættes på side 2

(kapitalen til tid $2n$ er 1 og det er første gang siden spillet startede, at kapitalen er så lav). Bemærk, at såfremt hændelsen $A_n$ er indtruffet, må $K_1 = 2$.
Vis, at for hvert $n \geq 1$ er de betingede sandsynligheder $P(R \mid A_n)$ alle lig med $p$ og at

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \frac{2}{3}p. \qquad (*)$$

*Vejledning vedrørende* $(*)$: Udnyt bl.a., at foreningsmængden af hændelserne $A_n$; $n \geq 1$ kan skrives som $B \cap C$, hvor $B$ er hændelsen, at $K_1 = 2$, og $C$ hændelsen, at kapitalen på et eller andet tidspunkt kommer ned på 1.

(iv) Vis, at

$$p = \frac{1}{3} + \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) \cdot P(R \mid A_n)$$

og bestem herved $p$.

## **Opgave 2** (30 point)

En to-dimensional stokastisk vektor $(X, Y)$ har en fordeling med tæthedsfunktion $f$ givet ved

$$f(x,y) = \frac{1}{2}|x|e^{-y}\,;\ (x,y) \in D,$$

hvor

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > |x|\}.$$

(i) Bestem de marginale tæthedsfunktioner.

(ii) Beregn middelværdi og varians for såvel $X$ som $Y$.

(iii) Beregn sandsynlighederne $P(X > 1)$ og $P(Y < 1)$ (to decimaler).

(iv) Vis, at $X$ og $Y$ er ukorrelerede, og undersøg, om $X$ og $Y$ er uafhængige.

(v) Bestem for hvert $x \neq 0$, den betingede fordeling af $Y$ givet $X = x$ (angiv den tilhørende tæthed med tydelig angivelse af definitionsmængden). Bestem også, for hvert $y > 0$, den betingede fordeling af $X$ givet $Y = y$.

## **Opgave 3** (30 point)

I 1980 fødtes der i Danmark flere drenge end piger, nemlig 29352 drenge og 27941 piger, Kan man på dette grundlag opretholde en hypotese om at pige- og drengefødsler er lige hyppige?