Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet vinteren 1998-1999

Matematik 2 SS

Opgaver til besvarelse i 3 timer.

Alle hjælpemidler er tilladte.

Opgavesættet består af 3 opgaver og er på 3 sider.

Opgave 1 (35%)

En urne indeholder til tid 0 to kugler, en hvid og en grå. Der udtrækkes en kugle tilfældigt fra urnen til tid 1. Er den udtrukne kugle hvid, lægges den uændret tilbage i urnen. Er den udtrukne kugle grå, farves den først sort, hvorefter den lægges tilbage i urnen. Næste udtrækning, der også foretages tilfældigt, foregår til tid 2. Udtrækkes en hvid kugle, lægges den uændret tilbage i urnen. Udtrækkes en grå kugle, farves den først sort, hvorefter den lægges tilbage i urnen. Udtrækkes en sort kugle, stopper udtrækningerne ("død" indtræffer), og man noterer dødstidpunktet T (i dette tilfælde er dødstidspunktet $T = 2$). Er man ikke "død", fortsætter udtrækningerne efter ovenstående regler.

Udtrækningerne foregår altså efter regler, der kan resumeres som følger:

S: Startkonfiguration: én hvid og én grå kugle.

U1: Udtrækkes til tid t en hvid kugle, lægges den uændret tilbage.

U2: Udtrækkes til tid t en grå kugle, farves den sort før tilbagelægning.

U3: Udtrækkes til tid t en sort kugle, "dør" man, og dødstidspunktet er $T = t$.

(i) Bestem sandsynligheden for at $T = 2$.

(ii) Bestem sandsynligheden for at der til tiderne $1, 2, 3, 4$ og 5 udtrækkes kugler af følgende farver: hvid, grå, hvid, hvid, sort (i nævnte rækkefølge)?

(iii) Bestem $P(T = 5)$.

(iv) Bestem T's fordeling. (Man rådes til at checke, at summen af punktsandsynlighederne er 1).

(v) Bestem T's middelværdi.

(vi) Se nu på udtrækninger, der foregår efter reglerne $U1, U2$ og $U3$, men hvor startkonfigurationen er ændret til:

$$S^* : \quad \text{Startkonfiguration: to hvide og én grå kugle.}$$

Lad T^* betegne dødstidspunktet i denne situation og bestem T^*'s fordeling og middelværdi. (Som hjælp til kontrol af udførte regninger anføres, at $E(T^*) = 6$).

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 2 (35%)

Den stokastiske vektor (X, Y) har en fordeling med to-dimensional tæthedsfunktion $f = f(x, y)$ givet ved

$$f(x,y) = \begin{cases} cx^2 e^{-y} & \text{for } x > 0 \text{ og } y > x^3, \\ 0 & \text{ellers,} \end{cases}$$

hvor c er en positiv konstant.

(i) Skitsér mængden $D \subseteq \mathbb{R}^2$ af (x, y) med $f(x, y) > 0$.

(ii) Bestem de marginale tæthedsfunktioner og konstanten c.

(iii) Beregn $P(X > 1)$ og $P(Y < 1)$ samt $P(X > 1, Y < 1)$.

(iv) Er X og Y uafhængige?

(v) Lad nu a og b betegne to positive konstanter og lad $D_{a,b}$ betegne mængden af de $(x, y) \in D$ for hvilke $x \leq a$ og $y \leq x^3 + b$. Skitsér mængden $D_{a,b}$ og beregn

$$P(X \leq a,\, Y - X^3 \leq b).$$

(vi) Bevis, at X og $Y - X^3$ er uafhængige stokastiske variable. *Vejledning.* Man kan enten udnytte resultatet under (v), eller man kan anvende transformationssætningen til at bestemme fordelingen af den stokastiske vektor (Z, W), hvor $Z = X$ og $W = Y - X^3$.

Opgave 3 (30%)

Der foreligger en stikprøve af størrelse 50 fra en fordeling, man har en formodning om er fordelingen med tæthedsfunktion f givet ved

$$f(x) = \frac{1}{x^2}\,;\ x > 1.$$

(i) Lad $I_0, I_1, \cdots, I_9$ betegne intervallerne givet ved

$$I_\nu = \left[\frac{10}{10-\nu}, \frac{10}{10-\nu-1}\right[\,; \quad \nu = 0, \cdots 9$$

(med $I_9 = [10, \infty[$). Bestem for ethvert af disse intervaller det forventede antal observationer (blandt de 50 observationer, der udgør stikprøven), der falder i intervallet.

(ii) Forklar, hvorledes man kan teste, om stikprøven er fra den formodede fordeling på basis af tallene $n_0, n_1, \cdots, n_9$, hvor n_ν betegner antallet af observationer, der

Opgave 3 fortsættes på side 3

tilhører intervallet I_ν; $\nu = 0, 1, \cdots, 9$. Spørgsmålet ønskes besvaret ved at man opstiller en statistisk model og forklarer, hvilket test, man vil udføre.

(iii) Idet det nu opgives, at

$$(n_0, n_1, \cdots, n_9) = (4, 3, 6, 4, 5, 7, 7, 5, 3, 6),$$

skal man afgøre, om man på basis heraf kan opretholde formodningen om at stikprøven er fra fordelingen med den angivne funktion f som tæthedsfunktion.