Matematik 2 SS

Opgaver til besvarelse i 3 timer.

Alle hjælpemidler er tilladte.

Opgave 1 (35%)

Der udføres en serie af kast (kast nr. 1, der udføres til tid 1, kast nr. 2, der udføres til tid 2, osv.) med en skæv mønt, der med sandsynlighed p viser "krone"(K) og med sandsynlighed $q = 1 - p$ viser "plat"(P). Kastene er uafhængige af hinanden. Med T betegnes den stokastiske variabel, der angiver tidspunktet, hvor der for første gang er opnået to ens i to på hinanden følgende kast. F.eks. for en serie af kast, der forløber som følger: $KPKKKP\cdots$ er $T = 4$, mens et forløb som $PKPKPKKPP\cdots$ giver $T = 7$.

(i) Hvilken fordeling har T, hvis p er enten 0 eller 1?

(ii) Bestem T's fordeling i tilfældet $p = \frac{1}{2}$. Bestem også $E(T)$ i dette tilfælde.

(iii) Eftervis, at der for hvert $0 < p < 1$ findes en diskret fordeling med positive punktsandsynligheder p_n i n for $n \geq 2$ givet ved

$$p_n = \begin{cases} (pq)^{\frac{n-2}{2}}(1-2pq) & \text{for } n \text{ lige}, \quad n \geq 2 \\ (pq)^{\frac{n-1}{2}} & \text{for } n \text{ ulige}, \quad n \geq 3 \end{cases}$$

(som ovenfor er $q = 1 - p$).

(iv) Vis, at middelværdien af fordelingen angivet i (iii) er

$$\frac{2 + pq}{1 - pq}.$$

(v) Vis, at fordelingen af T i det generelle tilfælde $0 < p < 1$ netop er den i (iii) angivne fordeling. *Vejledning:* Ved bestemmelsen af $P(T = n)$ står man sig ved at opdele efter om n er lige eller ulige; desuden kan der opdeles efter om man ender med to krone eller to plat.

Opgave 2 (35%)

Den stokastiske vektor (X, Y) har tæthedsfunktion f givet ved

$$f(x, y) = |x|e^{-y}\,; \quad (x, y) \in D,$$

Opgave 2 fortsættes på side 2

hvor

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > x^2\}.$$

(i) Bestem de marginale tæthedsfunktioner.

(ii) Beregn sandsynlighederne $P(X > 1)$, $P(Y < 1)$ og $P(X > 1, Y < 1)$.

(iii) Bestem, for hvert $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, den betingede fordeling af Y givet $X = x$ (angiv den tilhørende tæthed). Bestem også, for hvert $y > 0$, den betingede fordeling af X givet $Y = y$ (angiv igen den tilhørende tæthed).

Bemærkning: Der lægges vægt på at definitionsmængderne for de angivne tæthedsfunktioner præciseres.

(iv) Udregn $E(X)$, $E(Y)$, $\sigma^2(X)$ og $\sigma^2(Y)$.

(v) Vis, at X og Y er ukorrelerede, og undersøg, om X og Y er uafhængige.

Opgave 3 (30%)

Lad $x_1, \cdots, x_n$ være en stikprøve af størrelse n fra en fordeling med tæthedsfunktion

$$f(x) = \theta e^{-\pi\theta^2 x^2}\,; \quad x \in \mathbb{R}$$

hvor θ er en positiv parameter.

(i) Vis, at $x_1^2 + \cdots + x_n^2$ er en sufficient stikprøvefunktion.

(ii) Bestem maksimaliseringsestimatoren $\hat{\theta}$.

(iii) Det antages nu, at $n = 10$. Idet man ser på nulhypotesen $H_0 : \theta = (2\pi)^{-\frac{1}{2}}$ og den alternative hypotese $H_1 : \theta = \pi^{-\frac{1}{2}}$, skal man vise, at test med et kritisk område af formen

$$C_t = \{(x_1, \cdots, x_{10}) \mid x_1^2 + \cdots + x_{10}^2 \leq t\},$$

hvor t er en positiv konstant, er bedste test af H_0 mod H_1.

(iv) I situationen beskrevet ovenfor skal man bestemme t (omtrentlig værdi) således at testet med kritisk område C_t har signifikansniveau 5%.