Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet sommeren 1997

Matematik 2 SS

Opgaver til besvarelse i 3 timer.

Alle hjælpemidler er tilladte.

Opgave 1 (35%)

Et alfabet består af bogstaver, der kan inddeles i to typer, vokaler og konsonanter. En kasse (tænk evt. på det som en typografs sættekasse) indeholder i alt N bogstaver. Heraf er $\nu_1 + \nu_2 + \cdots + \nu_a = V$ vokaler, idet der er ν_1 eksemplarer af én vokal, ν_2 af en anden osv. indtil ν_a eksemplarer af den a'te vokal, og af de N bogstaver er $\mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_b = K$ konsonanter, idet der er μ_1 eksemplarer af én konsonant, μ_2 af en anden osv. indtil μ_b eksemplarer af den b'te konsonant. I kassen er der altså a forskellige slags vokaler og b forskellige slags konsonanter.

Med A betegnes antallet af forskellige ord af længde N, der i princippet kan dannes ud fra de N bogstaver i kassen (alle ord kan altså komme på tale, hvad enten de giver mening i det pågældende sprog eller ej).

Med B betegnes antallet af forskellige ord af længde N, der i princippet kan dannes ud fra de N bogstaver i kassen, idet det nu forlanges om et ord, at der ikke står to eller flere vokaler ved siden af hinanden i ordet. Kort sagt, B er antallet af ord uden nabovokaler.

(i) Bestem A i tilfældet, hvor $a = 2$, $b = 3$ og $\nu_1 = 2$, $\nu_2 = 1$, $\mu_1 = 1$, $\mu_2 = 1$, $\mu_3 = 1$ (så er $V = 3$, $K = 3$ og $N = 6$). *Bemærkning:* F.eks. kunne kassen indeholde to e'er, ét o, ét m, ét r og ét t; så er f.eks. “meteor”, “teorem” og “retome” ord, der skal regnes med, når A skal bestemmes (selvom det sidste ord er meningsløst på dansk).

(ii) Opskriv i det generelle tilfælde et udtryk for A (en begrundelse, gerne kort, for gyldigheden af udtrykket skal anføres).

(iii) I det specielle tilfælde, der er angivet i (i), skal man bestemme B. *Bemærkning:* I tilslutning til bemærkningen ovenfor kan man notere sig, at af de tre anførte ord er det kun “retome”, der skal regnes med, når B bestemmes.

(iv) Bestem B i det generelle tilfælde. *Vejledning.* Man kan antage, at $V \leq K + 1$ (ellers er $B = 0$). Se på tilladte måder at placere vokalerne på. F.eks. for $V = 4$ og $K = 5$ er en placering som den på figuren angivne mulig, idet der ikke er nabovokaler.

	*		*			*		*		*	: vokal		: konsonant

For enhver fast placering af vokalerne (af den tilladte slags) kan antallet af ord med netop denne placering af vokalerne bestemmes. Endelig kan man bestemme antallet af tilladte placeringer af vokalerne, f.eks. ved at udvælge V pladser til vokalerne blandt $K+1$ pladser

Opgave 1 fortsættes på side 2

og så tilføje $V-1$ "ekstra" pladser til konsonanter svarende til hvert mellemrum mellem to vokaler.

(v) Bevis, at hvis man tilfældigt udvælger ét af de A ord, således at alle disse ord er lige sandsynlige, så er sandsynligheden p for at det valgte ord ikke har nabovokaler givet ved

$$p = \frac{\binom{K+1}{V}}{\binom{N}{V}} .$$

Opgave 2 (30%)

Det oplyses, at de stokastiske variable X_1 og X_2 har en simultan fordeling med tæthedsfunktion f givet ved

$$f(x_1, x_2) = 2e^{-(x_1+x_2)}; \quad 0 < x_1 < x_2 .$$

(i) Bestem de marginale fordelinger og de tilhørende middelværdier og varianser.

(ii) Afgør, om X_1 og X_2 er uafhængige.

(iii) Afgør, om X_1 og $X_2 - X_1$ er uafhængige (bestem f.eks. først den simultane fordeling for disse to stokastiske variable).

Opgave 3 (35%)

Der foreligger en stikprøve af størrelse 30 fra en diskret fordeling koncentreret i $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$. Tabellen viser, for $0 \le k \le 10$, antal observationer x_k, der gav værdien k.

k	x_k
0	0
1	0
2	3
3	2
4	6
5	9
6	4
7	3
8	2
9	0
10	1

Opgave 3 fortsættes på side 3

(i) Såfremt man antager, at stikprøven er fra binomialfordelingen BIN$(10, \frac{1}{2})$, skal man for hvert k bestemme det forventede antal observationer, der giver værdien k. De beregnede værdier ønskes angivet med 2 decimaler.

(ii) Bestem en inddeling af $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ i 5 grupper, således at det forventede antal observationer i hver gruppe er mindst 5. Angiv de forventede og de observerede antal for hver gruppe.

(iii) Foretag en test af hypotesen, at stikprøven er fra fordelingen BIN$(10, \frac{1}{2})$, (opstil en statistisk model og forklar principperne for det anvendte test, gerne med henvisninger til noterne).