Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet vinteren 1996-97

Matematik 2 SS

Opgaver til besvarelse i 3 timer mandag den 6. januar 1997.

Opgave 1

En urne indeholder 1 rød og n blå kugler. De blå kugler er hver påmalet et tal mellem 1 og n, således, at hvert tal mellem 1 og n kun findes på én kugle.
Der udtrækkes kugler fra urnen, én ad gangen uden tilbagelægning. Udtrækningerne fortsætter indtil den røde kugle er udtrukket. Med T betegnes antallet af blå kugler, der er udtrukket før den røde kugle udtrækkes. Med S betegnes summen af de tal, der er påmalet alle blå kugler, der er udtrukket før den røde kugle udtrækkes (S sættes til 0, hvis den røde kugle udtrækkes i første udtrækning).

(i) Bestem T's fordeling.

(ii) Udregn $E(S)$ i tilfældene $n = 1$, 2 og 3, (de fundne værdier kan senere bruges til kontrol af svaret på (v)).

Indfør stokastiske variable X_ν; $\nu = 1, 2, \ldots, n+1$ ved at sætte $X_\nu = 0$ såfremt den røde kugle er udtrukket i ν'te udtrækning eller før, og ved ellers at sætte $X_\nu =$ det tal, der er påmalet den kugle, der udtrækkes i ν'te udtrækning.

(iii) Udtryk S ved X_ν'erne.

(iv) Bestem den betingede fordeling af X_ν givet $T = k$, idet det antages, at $\nu \leq k$. Angiv tillige den betingede middelværdi af X_ν givet $T = k$ (stadig under antagelsen $\nu \leq k$).

(v) Bestem middelværdien af S (man kan f.eks. udnytte de tidligere resultater, men svaret kan også findes mere direkte).

Opgave 2

Lad X_1 og X_2 være uafhængige, eksponentialfordelte stokastiske variable med parametre hhv. λ_1 og λ_2.
Sæt $Y_1 = \min(X_1, X_2)$ og $Y_2 = \max(X_1, X_2)$.

(i) Bestem Y_1 og Y_2's fordelinger (gerne angivet via de tilhørende fordelingsfunktioner), samt $E(Y_1)$ og $\sigma^2(Y_1)$.

(ii) Bestem $E(Y_2)$ og $\sigma^2(Y_2)$.

(iii) For $0 < y_1 < y_2 < \infty$ skal man dernæst bestemme

$$P(Y_1 > y_1 \wedge Y_2 \leq y_2)$$

Opgave 2 fortsættes på side 2

(her står "$\wedge$" for "logisk og").

(iv) Bevis, at den simultane fordeling af den stokastiske vektor (Y_1, Y_2) er givet ved den simultane tæthedsfunktion g bestemt ved

$$g(y_1, y_2) = \lambda_1 \lambda_2 \left(e^{-(\lambda_1 y_1 + \lambda_2 y_2)} + e^{-(\lambda_1 y_2 + \lambda_2 y_1)} \right) \; ; \quad 0 < y_1 < y_2 \, .$$

Opgave 3

Med P betegnes den geometriske fordeling med parameter $1/6$ (således er $P(I)$ lig med sandsynligheden for at en GEO(1/6)-fordelt stokastisk variabel antager en værdi, der tilhører mængden I). Der foreligger en stikprøve af størrelse 40 fra en fordeling, som man har en formodning om netop er P. Man ønsker at teste, om denne formodning er rigtig.

(i) Med I_1, I_2, I_3, I_4 betegnes mængderne

$$I_1 = \{0\} \, , \; I_2 = \{1, 2\} \, , \; I_3 = \{3, 4, 5, 6\} \, , \; I_4 = \{k \mid k \geq 7\} \, .$$

Beregn det forventede antal observationer (blandt de 40 observationer, der udgør stikprøven), som falder i hver af mængderne I_1, I_2, I_3, I_4.

(ii) Forklar, hvorledes man kan teste det ønskede på basis af antallet af observationer, der tilhører hver af mængderne I_1, I_2, I_3 og I_4. Spørgsmålet skal besvares ved at man opstiller en statistisk model og forklarer, hvilket test, man vil udføre.

(iii) Idet det opgives, at der er hhv. 9, 7, 12 og 12 observationer i hhv. I_1, I_2, I_3 og I_4, skal man afgøre, om man på basis heraf kan opretholde formodningen om at stikprøven er fra fordelingen P.