Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet vinteren 1995-1996

Matematik 2 SS

Opgaver til besvarelse i 3 timer tirsdag den 2. januar 1996.

Bemærkning. Ved bedømmelsen vægtes opgaverne i forholdet 40 : 30 : 30, således at Opgave 1 tillægges størst vægt.

Opgave 1

En urne indeholder på dag 0 én hvid og én sort kugle. Hver af dagene nr. $1, 2, 3, \cdots$ udtrækkes om morgenen en kugle tilfældigt fra urnen, og den udtrukne kugle, sammen med endnu én kugle af samme farve som den udtrukne, lægges straks tilbage i urnen. Med X_n betegnes antallet af hvide, og med Y_n antallet af sorte kugler i urnen på dag n. Således er $X_0 = Y_0 = 1$ og $X_n + Y_n = n + 2$ for $n \geq 0$. Vi indfører betegnelsen S for den stokastiske variabel, der angiver tidspunktet, dvs. dagen, hvor vi for første gang trækker en sort kugle. At $S = n$ betyder således, at $Y_{n-1} = 1$ og $Y_n = 2$. Vi sætter $S = \infty$ såfremt alle udtrukne kugler er hvide ($Y_k = 1$ for alle $k \geq 0$). (Tolkes sort som "død", kan man tænke på S som dødstidspunktet eller, ækvivalent, som levetiden).

Bemærkning. Det kan være en notationsmæssig lettelse at indføre betegnelserne h_k og s_k for hændelserne hhv. "den k'te dags morgen udtrækkes en hvid kugle" og "den k'te dags morgen udtrækkes en sort kugle". Til illustration: Hændelsen $h_1 s_2 h_3$ betegner så hændelsen, at de første udtrækninger resulterer i at hhv. en hvid, en sort og en hvid kugle udtrækkes, jvf. figuren, der for denne situation viser indholdet af urnen de tre første dage (og dag 0). Bemærk i øvrigt, at i dette tilfælde har S værdien 2.

(i). Bestem fordelingerne af X_0, X_1, X_2 og X_3.

(ii). Svaret på (i) tyder på, at X_n for hvert n er ligefordelt over de mulige værdier, X_n kan antage. Bevis, at denne formodning er rigtig.

Vejledning. Beviset kan f.eks. føres ved induktion. Det kan også føres mere direkte som følger: Antag, at der på dagene $1, 2, \cdots, n$ alt i alt udtrækkes ν hvide kugler. Se på de dage, hvor der udtrækkes en hvid kugle. På hvor mange måder kan placeringen af disse "hvide" dage vælges? Tænk på en fast placering af de ν "hvide" dage – de resterende $n - \nu$ dage er så "sorte" dage – og beregn sandsynligheden for, at de n første udtrækninger netop forløber som angivet ved placeringen af de "hvide" og "sorte" dage. For en delvis,

Opgave 1 fortsættes på side 2

men næsten tilfredsstillende besvarelse af denne del af opgaven, kan man nøjes med at se på de to tilfælde, hvor de ν dage enten er de ν første eller de ν sidste af dagene $1, 2, \cdots, n$.

(iii). Bevis, at for hvert $n \geq 1$, er $P(S \geq n) = \frac{1}{n}$ og slut heraf, at $P(S = \infty) = 0$.

Vejledning. Anvend reglen om beregning af sandsynligheder ved approksimation udefra.

Bemærkninger. Selv om (ii) eventuelt ikke er besvaret, kan beregningen af $P(S \geq n)$ let gennemføres direkte. Man kan tolke resultatet vedrørende $P(S = \infty)$ derhen, at sandsynligheden for at opnå en uendelig lang levetid er 0.

(iv). Bevis, at $E(S) = \infty$.

Vejledning. Man kan enten anvende det første resultat under (iii) direkte, eller man kan udnytte dette resultat til først at bestemme punktsandsynlighederne i S's fordeling.

Bemærkning. Man kan tolke resultatet derhen, at middellevetiden er uendelig.

Opgave 2

Med ξ_1, ξ_2, og ξ_3 betegnes tre uafhængige identisk fordelte stokastiske variable, der alle har værdier i intervallet $]0, 1[$. Den fælles fordeling har tæthedsfunktionen $k(t)\,;\ 0 < t < 1$. Vi betegner med X_1 den mindste, med X_2 den næstmindste, og med X_3 den største af ξ'erne. (Med brug af notation fra noterne er $X_1 = \xi_{(1)}$, $X_2 = \xi_{(2)}$ og $X_3 = \xi_{(3)}$).

(i). Udtryk den simultane tæthedsfunktion $f = f(x_1, x_2, x_3)$ for (X_1, X_2, X_3) ved hjælp af tæthedsfunktionen k.

Bemærkning. Husk at anføre definitionsmængden for den angivne funktion f.

(ii). Med Y_1, Y_2 og Y_3 betegnes de stokastiske variable, der er givet ud fra X'erne ved ligningerne

$$Y_1 = \frac{X_1}{X_2}$$
$$Y_2 = \frac{X_2}{X_3}$$
$$Y_3 = X_3\ .$$

Udtryk den simultane tæthedsfunktion $g = g(y_1, y_2, y_3)$ for (Y_1, Y_2, Y_3) ved hjælp af tæthedsfunktionen k.

(iii). Vis, at såfremt $k(t) = 2t$; $0 < t < 1$, så er Y_1, Y_2 og Y_3 stokastisk uafhængige, og bestem fordelingerne for disse stokastiske variable.

(iv). Mon uafhængighedsresultatet under (iii) gælder uanset tæthedsfunktionen k? (Svaret skal begrundes!).

Opgave 2 fortsættes på side 3

Opgave 3

Peter har et sæt med 48 kort, der udelukkende indeholder billedkort. Efter hans eget udsagn er sættet samlet ved at udtage alle billedkort fra 4 sæt kort. Hvis man skal tro Peter, indeholder sættet altså 4 kort af hver af 12 mulige slags (Konge, Dame og Knægt i de 4 farver $\diamondsuit$, $\heartsuit$, $\clubsuit$ og $\spadesuit$).

En dag har Peter været sammen med vennerne. Han indgik et væddemål, hvor hans gevinst afhang af, om han efter at kortene var blandet kunne udtage et trumfkort (dvs. en $\spadesuit$). I alt prøvede han 9 sådanne udtagninger. Efter hver udtagning blev det udtagne kort lagt tilbage til de andre og kortene blev pålny blandet.

Af de 9 udtagninger lykkedes det 4 gange for Peter at udtage et trumfkort. Kan man på dette grundlag opretholde en formodning, om at sættet med kort er sammensat som Peter påstår? Ved besvarelsen af spørgsmålet skal man opstille en statistisk model, se på et relevant test i tilknytning til spørgsmålet, gennemføre beregningerne i tilknytning til det valgte test og endelig anføre en konklusion.