Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet vinter 1999–2000

Matematik 2 OK

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

Alle sædvanlige hjælpemidler, dvs. bøger, noter, notater og lommeregnere, kan medbringes.

Opgavesættet består af 5 opgaver og er på 3 sider. Besvarelsen bedømmes som en helhed.

Opgave 1

Lad C_1 og C_2 være de konvekse mængder i rummet $\mathbb{R}^3$ givne ved:

$$\begin{aligned} C_1 &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_2^2 + x_3^2 < 1,\ x_1 = 0\} \\ C_2 &= \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_1 x_2 > 1,\ x_1 > 0,\ x_3 = 1\}. \end{aligned}$$

Bevis, at $C_1 + C_2$ er en åben konveks delmængde af $\mathbb{R}^3$.

Opgave 2

Der er givet en reel funktion f på $\mathbb{R}$ ved

$$f(x) = \begin{cases} -4x + 12 & x \leq 3 \\ -4\ln(x-2) & 3 < x \leq 2 + e \\ -4 & 2 + e < x. \end{cases}$$

a) Begrund, at f er konveks.

b) Find subdifferentialet $\partial f(x)$ i alle punkter.

c) Vi betragter (X, T) planen og lader heri E betegne epigrafen for f og C den konvekse delmængde af planen givet ved

$$C = \{(x, t) \in \mathbb{R}^2 \mid (x+1)^2 + (t+3)^2 \leq 4\}.$$

Vis, at C og E kan separeres stærkt, og bestem en separerende hyperplan $H(y, \alpha)$ som har tom fællesmængde med både C og E.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 3

Der er givet et lineært maksimeringsproblem

$$\text{(P)} \quad \text{maks } (5x_1 + 7x_2 - 5x_3)$$

under bibetingelserne:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 - x_3 &= 3 \\ 3x_1 + 3x_2 - 2x_3 &= 6 \\ -3x_1 - 5x_2 + 3x_3 &\leq -7, \; x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0. \end{aligned}$$

a) Bestem mængden $\mathcal{T}$ af tilladte eller mulige løsninger for (P).

b) Begrund ud fra svaret i punkt a) eller på anden måde, at (P) har en optimal løsning og bestem denne.

c) Opskriv det duale problem og løs det.

Opgave 4

Der er givet et konvekst minimeringsproblem

$$\text{(P)} \quad \min(x^2 + y^2 - 30x - 10y)$$

under bibetingelserne

$$\begin{aligned} &x^2 - 10x + y^2 - 10y + 25 \leq 0 \\ &x - 3y + 5 \leq 0. \end{aligned}$$

a) Lad C_0 betegne den delmængde af $\mathbb{R}^2$ hvor bibetingelserne er opfyldte. Tegn en skitse af C_0 og bevis herud fra, at problemet har en optimal løsning samt en Kuhn-Tucker vektor.

b) Bestem normalkeglen $N_{C_0}(x, y)$ for alle punkter (x, y) i C_0.

c) Bestem den optimale værdi for (P) samt den punktmængde hvori den antages.

Opgavesættet fortsættes på side 3

Opgave 5

Der er givet et optimalt kontrolproblem

$$\text{maks} \int_0^2 (-x^2 + 2t^2 x - 2u)dt$$

under betingelserne

$$\dot{x} = 2t + 2u - 2, \quad 1 \leq u \leq 2, \; x(0) = 1, \; x(2) = 7.$$

a) Begrund, at der findes nødvendige og tilstrækkelige betingelser for problemets løsning og opstil disse.

b) Det opgives nu, at problemet har en optimal løsning $x(t), u(t)$ med tilhørende adjungeret funktion $p(t)$. Vis, at $x(t) \geq t^2 + 1$ på intervallet $[0, 2]$ og slut heraf, at $p(t)$ er strengt voksende.

c) Løs problemet. Det er tilladt at anvende resultaterne fra spørgsmål b), selvom spørgsmålet ikke er besvaret.