Københavns Universitet
Ekstraopgaver i konveksitet, efterår 1999

Matematik 2 OK

Bortset fra opgave 2 kan de nedenstående opgaver løses med den teori for konvekse mængder, som vi har gennemgået i løbet af de første uger af september 1999. Opgave 2 benytter ikke topologi på en væsentlig måde, så det er ikke her problemet ligger. God fornøjelse.

Opgave 1

Lad P og Q være delmængder af $\mathbb{R}^n$ og lad $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Vis, at hvis det for vilkårlige 3 punkter $T = \{x, y, z\} \subseteq P \cup Q$ gælder at $T \cap P$ er strengt separeret fra $T \cap Q$ ved hjælp af en hyperplan med normalvektor $\mathbf{u}$, så er $\operatorname{conv}(P)$ og $\operatorname{conv}(Q)$ separeret af en hyperplan med normalvektor $\mathbf{u}$.

Opgave 2 (svær opgave)

Lad $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Vis, at hvis $y \in (\operatorname{conv}(A))^\circ$ da findes $\{x_1, \ldots, x_m\} \subseteq A$ med $m \leq 2n$ så $y \in (\operatorname{conv}(\{x_1, \ldots, x_m\}))^\circ$. ($A^\circ$ betyder det indre af A).

Opgave 3

Vis, at hvis vektorerne $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^n$ er lineært uafhængige, så er $\operatorname{conv}\{x_1, \ldots, x_k\} = \operatorname{aff}\{x_1, \ldots, x_k\} \cap \operatorname{cone}\{x_1, \ldots, x_k\}$.

Opgave 4

Vis, at hvis $M \subseteq \mathbb{R}^n$ da gælder:

$$0 \notin \operatorname{aff}(M) \Rightarrow \operatorname{conv}(M) = \operatorname{aff}(M) \cap \operatorname{cone}(M).$$

Prøv at skitsere situationen og byg beviset på skitsen.

Opgave 5

Lad S være en lukket delmængde af $\mathbb{R}^n$ som ikke er konveks. Vis, at S kan skrives $S = C_1 \cup C_2$ hvor C_1 og C_2 er konvekse hvis det for et vilkårligt ulige antal punkter $s_1, \ldots, s_{2k+1}$ fra S gælder:

Opgave 5 fortsættes på side 2

Hvis $[s_1, s_2] \not\subset S, [s_2, s_3] \not\subset S, \ldots, [s_{2k-1}, s_{2k}] \not\subset S, [s_{2k}, s_{2k+1}] \not\subset S$ så er $[s_1, s_{2k+1}] \subset S$.

Betingelsen er altså $[s_i, s_{i+1}] \not\subset S$ for $i = 1 \ldots 2k \Rightarrow [S_1, s_{2k+1}] \subset S$.

Vink: Hvis der findes 2 punkter $x, y \in S$ så $[x, y[\not\subset S$; find så kandidater for C_1 og C_2.

Opgave 6

Vis, at $b = \sum_{i=1}^{k} {}^{p} \lambda_i a_i$ hvis og kun hvis det for alle $x \in \mathbb{R}^n$ som opfylder $x \cdot a_1 \geq 0, \ldots, x \cdot a_k \geq 0$ gælder $x \cdot b \geq 0$. (Minkowski-Farkas lemma er navnet i matematisk økonomi).