Københavns Universitet
Naturvidenskabelig kandidateksamen, sommeren 1997

Matematik 2 OK

Sættet vurderes samlet.

Opgave 1

1°: Bevis, at det for alle $x, y \in]0, \pi[$ gælder, at

$$\frac{1}{2}\sin x + \frac{1}{2}\sin y \leq \sin\left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y\right).$$

2°: Angiv, for hvilke værdier af $a, b, d \in \mathbb{R}$ funktionen $f_{a,b,d}$ givet ved

$$f_{a,b,d}(x) = a + bx - \frac{1}{6}dx^3 - \sin x,$$

er konveks på $]0, \frac{\pi}{2}[$.

Opgave 2

1°: Lad f være en konveks funktion med $\text{dom}(f) = \mathbb{R}^n$, og antag, at for alle x gælder, at $f(-x) = f(x)$. Bevis, at hvis $x^* \in \text{dom}(f^*)$, da vil $-x^* \in \text{dom}(f^*)$, og $f^*(-x^*) = f^*(x^*)$.

2°: Lad $f(x) = e^{|x|}$ for $x \in \mathbb{R}$. Bestem f^*.

3°: Angiv subdifferentialet $\partial f(x)$ for alle $x \in \mathbb{R}$.

4°: Lad nu g være funktionen på $\mathbb{R}$ givet ved

$$g(x) = \begin{cases} e^x \text{ for } x \geq 0 \\ 1 \text{ for } x \leq 0 \end{cases}.$$

Bestem g^*.

Opgave 3

Betragt det konvekse optimeringsproblem

(P) Minimér f_0 under bibetingelserne $f_1 \leq 0$, $f_2 \leq 0$, hvor f_0, f_1 og f_2 er funktionerne på $\mathbb{R}^3$ givet ved

$$f_0(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2 + x_3^2 + 12x_1 - 2x_2 - 2x_3$$
$$f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 4x_2 - 2x_3 + 1$$
$$f_2(x_1, x_2, x_3) = |x_2 - 2| + x_3 - 1.$$

Opgave 3 fortsættes på side 2

Det kan benyttes uden bevis, at f_0, f_1, og f_2 er konvekse funktioner på $\mathbb{R}^3$.

1°: Vis, at subdifferentialet for f_2 er givet ved

$$\partial f_2(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} \{(0,-1,1)\} & \text{for } x_2 < 2 \\ L & \text{for } x_2 = 2 \\ \{(0,1,1)\} & \text{for } x_2 > 2 \end{cases},$$

hvor L betegner liniestykket conv$\{(0,-1,1)\}, \{(0,1,1)\}$.

2°: Bevis, at Slaters betingelse er opfyldt.

3°: Vis, at hvis (x_1, x_2, x_3) er en løsning, da er $x_2 = 2$ samt, at en Kuhn-Tucker vektor (u_1, u_2) ikke kan have både $u_1 = 0$ og $u_2 = 0$.

4°: Løs problemet (P).

Opgave 4

Det oplyses, at løsningsmængden til differentialligningen

$$\ddot{x} + \dot{x} = 1$$

er givet ved $\{x(t) = A \cdot e^{-t} + B + t \mid A, B \in \mathbb{R}\}$.
Lad $t_0 = 0$ og $t_1 = \ln 2$, hvor ln betegner den naturlige logaritme (den inverse funktion til eksponentialfunktionen).

Betragt følgende problem:

$$\min \int_{t_0=0}^{t_1=\ln 2} e^{x+\dot{x}} dt, \qquad x(0) = 1.$$

1°: Angiv Eulerligningen for problemet, og løs denne.

2°: Løs problemet under hver af de givne bibetingelser:

$$a) \quad x(t_1) = x(\ln 2) = \ln 2, \qquad b) \quad x(\ln 2) \geq \ln 2.$$

3°: Bevis, at problemet

$$c) \quad x(\ln 2) \text{ fri}$$

ikke har nogen løsning.