Københavns Universitet
Naturvidenskabelig kandidateksamen, vinteren 1996-1997

Matematik 2 OK

Sættet vurderes samlet. Bemærk afsnittet "Nyttige formler" side 3 i sættet.

Opgave 1

1°: Bevis, at for alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ gælder

$$(\frac{1}{2}x_1 + \frac{1}{2}x_2)^2 \leq \frac{1}{2}x_1^2 + \frac{1}{2}x_2^2.$$

2°: Bevis, at der for $x_1 > 0$, $x_2 > 0$ og $x_3 > 0$ gælder

$$\frac{9}{x_1 + x_2 + x_3} \leq (\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}).$$

3°: Bevis endelig, at der for $x_1 > 0$ og $x_2 > 0$ gælder

$$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2}} \geq \frac{1}{\sqrt{x_1 + x_2}}.$$

Opgave 2

Betragt følgende konvekse funktioner (det skal ikke bevises, at de er konvekse):

$$f(x) = \begin{cases} -2x - 2 & \text{for } x \leq -1 \\ 0 & \text{for } -1 \leq x \leq 0 \\ \infty & \text{for } x > 0 \end{cases} \quad \text{og} \quad g(x) = \begin{cases} \infty & \text{for } x < -2 \\ -x & \text{for } -2 \leq x \leq 0 \\ 0 & \text{for } x > 0 \end{cases}.$$

1°: Bevis, at $f^* = g$.
2°: Findes der andre funktioner h, så $h^* = g$? – Begrund svaret.
3°: Lav en detaljeret tegning af $\operatorname{epi} f$, $\operatorname{epi} g$ og $\operatorname{epi} f + \operatorname{epi} g$ og brug denne til at angive $f \Box g(x)$ og $(f + f^*)^*(x)$ for alle $x \in \mathbb{R}$.
4°: Udregn $f \Box g(x)$ for $x \leq -3$ (i dette delspørgsmål er det ikke tilstrækkeligt at aflæse tegningen).

Opgave 3

Betragt problemet:
(P) Minimer f_0 under bibetingelserne $f_1 \leq 0, f_2 \leq 0$,
hvor f_0, f_1 og f_2 er de tre funktioner på $\mathbb{R}^3$ givet ved

$$f_0(x,y,z) = z,\ f_1(x,y,z) = x^2 + \frac{1}{2}y^2 - yz + \frac{1}{2}z^2 - 2,\ f_2(x,y,z) = x^2 - y - z.$$

1°: Gør detaljeret rede for, at dette er et konvekst minimeringsproblem, og at Slaters betingelse er opfyldt.
2°: Løs (P).

Opgave 4

Betragt variationsproblemet:

$$\text{Minimer} \int_0^{\ln 4} (x + x^2 + \dot{x} + (\dot{x})^2)e^{\frac{3}{2}t}\, dt, \qquad x(0) = \frac{1}{4}.$$

Løs problemet i hvert af tilfældene

$$i)\ x(\ln 4) = \frac{1}{8}, \qquad ii)\ x(\ln 4) \geq \frac{35}{16} \quad \text{og} \qquad iii)\ x(\ln 4) \text{ fri.}$$

Opgave 5

1°: Betragt det optimale kontrolproblem:

$$\text{Maksimer} \int_0^2 (x+u)e^{-t}\, dt$$

når

$$x(0) = 2,\ u(t) \in [-1, 0],\ x(2) \geq 2 \text{ og } \dot{x} = x - u + 1.$$

1°: Det kan i dette delspørgsmål benyttes uden bevis, at en optimal løsning nødvendigvis må opfylde $x^*(2) > 2$. Beskriv Hamiltonfunktionen og angiv et eksplicit udtryk for den adjungerede funktion, der svarer til betingelserne.
2°: Angiv u^* og den tilsvarende x^*.
3° : Begrund, at en optimal løsning nødvendigvis må opfylde $x^*(2) > 2$.

Opgave 5 fortsættes på side 3

Nyttige formler (skal ikke bevises).

Lad C være en konstant. Differentialligningen

$$\ddot{f} + \frac{3}{2}\dot{f} - f = -C$$

har den fuldstændige løsning $f(t) = A \cdot e^{-2t} + B \cdot e^{\frac{1}{2}t} + C$ (A, B arbitrære konstanter).

Lad D, K være konstanter, $D \neq 0$. Differentialligningen

$$\dot{f} = D \cdot f + K$$

har den fuldstændige løsning $f(t) = -\frac{K}{D} + L \cdot e^{Dt}$ (L arbitrær konstant).

Endelig oplyses, at den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$\dot{f} = -f - e^{-t}$$

er $f(t) = (L - t)e^{-t}$ (L arbitrær konstant).