Københavns Universitet
Naturvidenskabelig kandidateksamen, vinteren 1995-1996

Matematik 2 OK

Sættes vurderes samlet.

Opgave 1

Lad de reelle tal $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ opfylde: $\lambda_1 > 0, \ldots, \lambda_k > 0$ samt

$$\sum_{i=1}^{k}{}^{c}\,\lambda_i = \lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 1.$$

1°: Bevis, at der gælder

$$\sum_{i=1}^{k}{}^{c}\,\lambda_i e^{\frac{1}{\lambda_i}} \geq e^k.$$

2°: Bevis, at der også gælder

$$\sum_{i=1}^{k}{}^{c}\,\lambda_i e^{\lambda_i} \geq e^{\frac{1}{k}}.$$

Opgave 2

Lad f være en egentlig afsluttet konveks funktion på $\mathbb{R}^n$ og lad funktionen g på $\mathbb{R}^n$ være givet ved

$$\forall u \in \mathbb{R}^n : g(u) = f(x_0 + u) - f(x_0) - x_1 \cdot u$$

for faste vektorer $x_0, x_1 \in \mathbb{R}^n$ med $x_0 \in \operatorname{dom} f$.

1°: Bevis, at $\operatorname{int}(\operatorname{dom} f) = \operatorname{int}(\operatorname{dom} g) + x_0$.

2°: Angiv eksplicit relationen mellem $\partial f(x_0)$ og $\partial g(0)$.

3°: Bevis følgende relation mellem ∂f^* og ∂g^* for et vilkårligt $x^* \in \mathbb{R}^n$:

$$\forall x \in \mathbb{R}^n : x \in \partial g^*(x^*) \Leftrightarrow x_0 + x \in \partial f^*(x^* + x_1).$$

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 3

Betragt funktionen

$$f(x_1, x_2) = |x_1 + x_2|$$

på $\mathbb{R}^2$.

1°: Gør rede for, at f er konveks og bevis, at $f^* = \delta_C$, hvor $C = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1 = x_2 \text{ og } |x_1| \leq 1\}$. (Vink: Se evt. på δ_C^*).

2°: Bestem $\partial f(x_1, x_2)$ i et vilkårligt punkt $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$.

3°: Bestem $\partial f^*(x_1^*, x_2^*)$ i et vilkårligt punkt $(x_1^*, x_2^*) \in \mathbb{R}^2$.

Opgave 4

Vi betragter det konvekse minimeringsproblem

(P) Minimer f_0 under bibetingelserne $f_1 \leq 0, f_2 \leq 0$,

hvor f_0, f_1 og f_2 er de tre konvekse funktioner (skal ikke vises) på $\mathbb{R}^2$ givet ved

$$\begin{aligned} f_0(x_1, x_2) &= e^{x_1^2 - x_2 + 17} \\ f_1(x_1, x_2) &= x_1^4 + 2x_2 - 5 \\ f_2(x_1, x_2) &= x_1^2 - x_2 - 3. \end{aligned}$$

1°: Skitsér mængden $\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid f_1(x_1, x_2) \leq 0, f_2(x_1, x_2) \leq 0\}$.

2°: Vis, at (P) opfylder Slaters betingelse og opstil en nødvendig og tilstrækkelig betingelse for, at $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ er en optimal løsning til (P).

3°: Find en optimal løsning til (P).

Opgave 5

Det oplyses, at løsningsmængden til differentialligningen

$$16\ddot{x} + 16\dot{x} + 3x = 3.$$

er givet ved $\{x(t) = A \cdot e^{-\frac{3}{4} \cdot t} + B \cdot e^{-\frac{1}{4} \cdot t} + 1 \mid A, B \in \mathbb{R}\}$.

Lad $t_0 = 0$ og $t_1 = 4\ln 2 = \ln 2^4$, hvor ln betegner den naturlige logaritme (den inverse funktion til eksponentialfunktionen).

Opgave 5 fortsættes på side 3

Københavns Universitet
Naturvidenskabelig kandidateksamen, vinteren 1995-1996
Matematik 2 OK

Find løsningen til følgende problem under hver af de givne bibetingelser:

$$\min \int_{t_0=0}^{t_1=4\ln 2} [3x + x^2 + 5x\dot{x} + 8\dot{x}^2]e^t dt, \qquad x(0) = 1$$

$$a) \quad x(t_1) = x(4\ln 2) = -\frac{4}{11}, \qquad b) \quad x(4\ln 2) \geq -\frac{4}{11}, \qquad c) \quad x(4\ln 2) \text{ fri .}$$

Bevis herunder, at Eulerligningen medfører følgende ligning for x:

$$16\ddot{x} + 16\dot{x} + 3x = 3.$$