Københavns Universitet
Naturvidenskabelig kandidateksamen, vinteren 1990-91

Matematik 2 OK

Opgaver til besvarelse i fire timer.

Alle sædvanlige hjælpemidler, dvs. bøger, noter, notater og lommeregnere, kan medbringes.

Opgavesættet består af fire opgaver. Besvarelsen bedømmes som en helhed; men det kan oplyses, at de enkelte opgaver i en normalbesvarelse vil blive vægtet med 20%, 30%, 25% og 25% for henholdsvis Opgave 1, 2, 3, og 4.

Opgave 1

Lad $C \neq \emptyset$ være en afsluttet konveks delmængde af $\mathbb{R}^n$. Vis, at følgende tre udsagn er ækvivalente:

(a) C er en afsluttet konveks kegle.

(b) δ_C er en støttefunktion.

(c) δ_C^* er en indikatorfunktion.

Opgave 2

Lad f_1, f_2 og f_3 betegne de reelle funktioner på $\mathbb{R}^3$ givet ved

$$f_i(x_1, x_2, x_3) = |x_i| , \qquad i = 1, 2, 3 .$$

Sæt $f: = \max\{f_1, f_2, f_3\}$.

1° Tegn en skitse af
$$H: = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid f(x) \leq 1\} .$$
Begrund, at H er en konveks polytop.

2° Begrund, at f_1, f_2, f_3 og f er afsluttede konvekse funktioner.

3° Angiv en afsluttet konveks mængde C_i med f_i som støttefunktion, $i = 1, 2, 3$.

4° Vis, at f er støttefunktion for den konvekse polytop $C: = \mathrm{conv}(C_1 \cup C_2 \cup C_3)$. Tegn C.

5° Beregn og tegn skitser af subdifferentialerne $\partial f(0,0,0)$, $\partial f(1,1,1)$, $\partial f(1,1,0)$, $\partial f(1,0,1)$ og $\partial f(1,0,0)$.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Københavns Universitet
Naturvidenskabelig kandidateksamen, vinteren 1990-91
Matematik 2 OK

Opgave 3

Betragt det lineære programmeringsproblem
(P) Minimér $2x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 5x_4$ under bibetingelserne

$$2x_1 + x_2 + x_4 \geq 5$$
$$x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 6$$
$$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0, x_3 \geq 0, x_4 \geq 0$$

1° Omskriv problemet (P) til et kanonisk problem af formen
(Q) Minimér $C^t X$ under bibetingelserne $AX = B, X \geq 0$.

2° Opskriv det duale problem (Q^*) til (Q) fra spørgsmål 1°.

3° Angiv en skitse af mængden M^* af mulige løsninger til (Q^*). Løs (Q^*).

4° Find en optimal løsning til det oprindelige problem (P).

Opgave 4

Vi betragter det konvekse optimeringsproblem
(P) Minimér f_0 under bibetingelserne $f_1 \leq 0$, $f_2 \leq 0$
hvor f_0, f_1 og f_2 er de tre funktioner på $\mathbb{R}^3$ givet ved

$$f_0(x_1, x_2, x_3) = 2x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + 2x_1 - x_2$$
$$f_1(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2$$
$$f_2(x_1, x_2, x_3) = |x_2| - x_3 + 1$$

Det oplyses, og kræves ikke bevist, at f_0, f_1 og f_2 er konvekse funktioner på $\mathbb{R}^3$.
Lad L betegne linjestykket $\mathrm{conv}\{(0, -1, -1), (0, +1, -1)\}$.

1° Vis, subdifferentialet

$$\partial f_2(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} \{(0, -1, -1)\} & x_2 < 0 \\ L & x_2 = 0 \\ \{(0, +1, -1)\} & x_2 > 0 \end{cases}$$

2° Vis, at (P) opfylder Slaters betingelse.

3° Vis, at hvis $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ er en løsning til (P), så er $x_2 = 0$.

4° Find en optimal løsning til (P) og en Kuhn-Tucker vektor af formen $(0, u_2)$, $u_2 > 0$. (Vink: Udnyt 3°!)