Københavns Universitet
Matematisk-økonomisk kandidateksamen, sommeren 1990

Matematik 2 OK

Opgaver til besvarelse i fire timer.

Alle sædvanlige hjælpemidler, dvs. bøger, noter, notater og lommeregnere kan medbringes.

Opgavesættet består af fem opgaver. Ved bedømmelsen vægtes opgaverne 1 og 2 med hver 15%, opgave 3 med 20% og opgaverne 4 og 5 med hver 25%.

Opgave 1

Lad $M \subseteq \mathbb{R}^3$ være bestemt ved

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid |x| + |y| + |z| \leq 1\} .$$

1° Vis, at M er konveks.

2° Begrund, at punktet $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{6}, -\frac{1}{3})$ tilhører M, men ikke det relative indre af M.

3° Lad B betegne den afsluttede kugle med centrum i $(1, 1, 1)$ og radius 1.
Bestem en hyperplan i $\mathbb{R}^3$ som separerer M og B.

Opgave 2

Lad den udvidede reelle funktion f og den konvekse funktion g på $\mathbb{R}$ være givet ved

$$f(x) = \begin{cases} \infty & x \leq 0 \\ -\log(x^2) & x > 0 \end{cases} \qquad\qquad g(x) = x^2$$

1° Vis, at f er en afsluttet konveks funktion.

2° Idet det opgives, at infimumfoldningen af f og g eksisterer ønskes denne bestemt eksplicit.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Københavns Universitet
Matematisk-økonomisk kandidateksamen, sommeren 1990
Matematik 2 OK

Opgave 3

Lad f betegne den konvekse funktion på $\mathbb{R}^2$ defineret ved

$$f(x,y) = |4x - y| \,.$$

1° Find $f'((x,y)\,;\,(a,b))$ for (x,y), $(a,b) \in \mathbb{R}^2$.

2° Begrund, at f er støttefunktion for en afsluttet konveks mængde C.

3° Bestem f^*.

Opgave 4

Betragt det lineære maksimeringsproblem

(P) Maksimer $y_1 + 2y_2 + 3y_3$; $y_1, y_2, y_3, \in \mathbb{R}$ under bibetingelserne

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 4 \\ 3 & -3 & 2 \\ -3 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

1° Vis, at mængden $\mathcal{M}$ af mulige løsninger til (P) ikke er tom.

2° Opskriv det duale problem (P*) til (P).

3° Vis, at mængden $\mathcal{M}^*$ af mulige løsninger til (P*) ikke er tom.

4° Løs (P*).

Opgave 5

Der er givet reelle funktioner f_0, f_1, f_2, f_3 på $\mathbb{R}^3$ ved

$$\begin{aligned} f_0(x,y,z) &= x^2 + y^2 + xy - 9x - 2y + z \\ f_1(x,y,z) &= -x - y \\ f_2(x,y,z) &= x + 2y - 4 \\ f_3(x,y,z) &= 2x^2 + 3y^2 - 4xy - z \end{aligned}$$

1° Gør rede for, at alle funktionerne $f_0, \ldots, f_3$ er konvekse.

2° Minimer f_0 under bibetingelserne $f_1 \leq 0$, $f_2 \leq 0$, $f_3 \leq 0$.