Københavns Universitet
Matematisk-økonomisk kandidateksamen, januar 1990

Matematik 2 OK

Opgaver til besvarelse i fire timer.

Alle sædvanlige hjælpemidler, dvs. bøger, noter, notater og lommeregnere, kan medbringes.

Opgavesættet består af fem opgaver. Ved bedømmelsen vægtes opgaverne 1 og 2 med hver 15%, opgave 3 med 20%, og opgaverne 4 og 5 med hver 25%.

Opgave 1

Der er givet 4 punkter P_1, P_2, P_3, P_4 i $\mathbb{R}^3$ med koordinaterne

$$\begin{aligned} P_1 &= (3,2,1) \\ P_2 &= (4,4,4) \\ P_3 &= (3,3,1) \\ P_4 &= (2,2,4) \end{aligned}$$

1° Vis, at punkterne er affint uafhængige.
2° Fremstil punktet $Q = (3,3,3)$ som en affin kombination af punkterne P_1, P_2, P_3, P_4.
3° Giv en kort begrundelse for at $Q \in \operatorname{conv}(P_1, P_2, P_3, P_4)$ og at $Q \notin \operatorname{int}(\operatorname{conv}(P_1, P_2, P_3, P_4))$.

Opgave 2

Lad den udvidede reelle funktion f på $\mathbb{R}^2$ være givet ved

$$f(x,y) = \begin{cases} e^{(3x+4y)} + 3x^2 + 5y^2 - 7xy & \text{for } |x+y| \le 1 \\ +\infty & \text{ellers.} \end{cases}$$

Vis, at f er en afsluttet konveks funktion.

Opgave 3

Lad den reelle funktion f på $\mathbb{R}$ være givet ved

$$f(x) = \max\{e^{-x}, e^{2x}\}.$$

a) Begrund, at f er en konveks funktion.
b) Angiv $\partial f(x)$ for $x \in \mathbb{R}$.
c) Bestem f^*.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Københavns Universitet
Matematisk-økonomisk kandidateksamen, januar 1990
Matematik 2 OK

Opgave 4

Vi betragter et lineært optimeringsproblem:

(P) $\qquad$ Minimér $C^t X$ u.b. $AX = B$ og $X \geq 0$,

hvor

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B^t = (14 \quad 38 \quad 20),$$

$$C^t = (0 \quad 1 \quad 0 \quad 2).$$

1° Find samtlige basisløsninger til (P).
2° Bestem de optimale basisløsninger.
3° Opskriv det duale problem og løs det.

Opgave 5

Minimér funktionen

$$f_0(x, y, z) = x^2 + z^2 - 2x - y - 2z \qquad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$$

under bibetingelserne

$$x^2 \leq 1, \quad z^2 + y \leq 1, \quad z^2 - y \leq 1.$$