Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet sommer 2000

Matematik 2OK

Opgaver til besvarelse i 4 timer.

Alle sædvanlige hjælpemidler, dvs. bøger, noter, notater og lommeregnere kan medbringes.

Opgavesættet består af 5 opgaver og er på 2 sider. Besvarelsen bedømmes som en helhed.

Opgave 1

Lad $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ være en positiv konveks funktion om hvilken det gælder at $-1 \in \partial f(0)$.

a) Vis, at talfølgen $(f(-n))_{n\in\mathbb{N}}$ er strengt voksende og ubegrænset.

b) Vis, at enten findes $x_0 \geq 0$ så x_0 er et mindsteværdipunkt for f eller også er talfølgen $(f(n))_{n\in\mathbb{N}}$ strengt aftagende og nedadtil begrænset. Det kan i beviset antages for kendt, at mængden $D = \{\alpha \in \mathbb{R} \mid \exists x \in \mathbb{R} : \alpha \in \partial f(x)\}$ er et interval.

Opgave 2

Der er givet en funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ ved

$$f(x, y) = |x + y - 2| + (1 + x^2 + y^2)^4.$$

a) Vis, at f er konveks.

b) Bevis at f har en mindsteværdi.

c) Bestem for $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\partial f(x, y)$.

d) Bevis at mindsteværdien må antages i et punkt (x_0, y_0) som opfylder $x_0 = y_0$, $0 < x_0 < 1$.

Opgave 3

Der er givet et standard lineært minimeringsprogram (P) ved

$$\text{(P)} \qquad \min x_1 + x_2 + x_3 \qquad \text{under bibetingelserne}$$

$$\begin{array}{rcl} 2x_1 \phantom{{}-2x_2} - x_3 & \geq & 1 \\ -x_1 - 2x_2 + 2x_3 & \geq & 1 \\ x_2 \phantom{{}+2x_3} & \geq & 9, \quad x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \; x_3 \geq 0. \end{array}$$

Opgave 3 fortsættes på side 2

a) Opskriv det duale program (P*).

b) Vis, at både for (P) og (P*) er mængderne bestående af mulige løsninger ikke tomme. En mulig løsning benævnes ofte en tilladt løsning.
Vis at for en vilkårlig mulig løsning (x_1, x_2, x_3) for (P) gælder $x_1 > 0$, $x_2 > 0$, $x_3 > 0$.

c) Løs (P) og (P*). Det er tilladt at bruge oplysningerne i spørgsmål b) selvom dette spørgsmål ikke er besvaret.

Opgave 4

Der er givet et minimeringsproblem (P) ved

$$\text{(P)} \qquad \min \quad x^2 + 2y^2 \qquad \text{under bibetingelserne}$$
$$x + y \geq 3$$
$$x^2 + 4y^2 - 4xy \leq 5.$$

a) Begrund at (P) er et konvekst problem som opfylder Slaters betingelse.

b) Løs problemet idet der klart redegøres for hvorfor det fundne punkt løser problemet.

Opgave 5

Der er givet et optimalt kontrolproblem

$$\text{maks} \int_0^1 (2x - u)\, dt \text{ under bibetingelserne}$$

$$\dot{x} = u - x\,, \quad 1 \leq u \leq 3\,,\ x(0) = 1\,,\ x(1) = 2.$$

a) Begrund at der findes nødvendige og tilstrækkelige betingelser for løsning af problemet og opstil disse.

b) Bevis at kontrollen $u(t)$ hørende til en mulig optimal løsning ikke kan være konstant 1 eller konstant 3, men at der må findes $t^* \in]0, 1[$ så $u(t)$ er konstant på intervallerne $[0, t^*[\,,\ ]t^*, 1]$.

c) Forsøg at løse problemet under antagelse om at den adjungerede funktion $p(t)$ er aftagende. Løs problemet.