Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet sommeren 1996

Matematik 2 MA 1

4 timers skriftlig prøve med hjælpemidler. (Det er tilladt at medbringe noter, bøger, egne notater o.l. samt lommeregnere.)

Opgavesættet består af 4 opgaver og er på 2 sider.

Opgave 1

Lad (X, d_X) og (Y, d_Y) betegne metriske rum. En kontinuert funktion $f : X \to Y$ siges at være *egentlig*, hvis det for enhver kompakt delmængde K af Y gælder, at $f^{-1}(K)$ er en kompakt delmængde af X.
Vi udstyrer i det følgende $\mathbb{R}^n$ med den sædvanlige metrik.

a) Lad X være den afsluttede kugle i $\mathbb{R}^n$ med centrum i 0 og radius 1 og antag at $f : X \to \mathbb{R}$ er kontinuert. Vis, at f er egentlig.

b) Antag, at $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ er kontinuert. Vis, at f er egentlig hvis og kun hvis

$$f^{-1}([-m, m])$$

er begrænset for ethvert $m \in \mathbb{N}$.

c) Betragt funktionerne $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$, givet ved

$$f_1(x) = 0\,, \qquad f_2(x) = |x|\,, \qquad f_3(x) = e^x\,.$$

Afgør, hvilke af disse funktioner der er egentlige.

Opgave 2

Sæt

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0\,,\ y \geq 0\,,\ z \geq 0\,,\ x + y \leq e^{-z}\}\,.$$

1° Er E afsluttet? Er E kompakt?

2° Bestem $m_3(E)$.

3° Betragt for et givet $\alpha \in \mathbb{R}$ funktionen $f_\alpha : E \to \mathbb{R}$ givet ved

$$f_\alpha(x, y, z) = \begin{cases} y^\alpha e^{2z}\,, & y \neq 0 \\ 0\,, & y = 0\,. \end{cases}$$

Undersøg, for hvilke α funktionen f_α er integrabel over E mht. Lebesgue målet m_3.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 3

1° Redegør for, at

$$F(x) = \int_0^1 \sqrt{y}\,\sin\left(\frac{x}{y}\right)\,dy$$

bestemmer en funktion $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ og at $F\left(\frac{1}{n}\right) \to 0$ når $n \to \infty$.

2° Bevis, at F er differentiabel med

$$F'(x) = \int_0^1 \frac{\cos\left(\frac{x}{y}\right)}{\sqrt{y}}\,dy\,,$$

og udregn $F'(0)$.

3° Vis, at

$$n\int_0^1 \sqrt{y}\,\sin\left(\frac{1}{ny}\right)\,dy \to 2\,,\ n \to \infty\,.$$

(*Vink:* omskriv udtrykket til en differenskvotient for F og benyt 2°).

Opgave 4

Lad $f : [1,\infty[\to [0,\infty[$ betegne en voksende Borel funktion. Lad μ være et Borel mål på $[1,\infty[$. Vi definerer for hvert $n \in \mathbb{N}$ en funktion $f_n : [1,\infty[\to [0,\infty[$ ved

$$f_n(x) = f(x+n)\,.$$

1° Redegør for, at

$$\lim_{x\to\infty} f(x)$$

fastlægger en værdi $a \in \overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$, og at

$$f_n(x) \to a\,,\quad n \to \infty$$

monotont for ethvert $x \in [1,\infty[$.

2° Vis, at

$$\int_1^\infty f_n d\mu \to a\mu([1,\infty[)\,,\quad n \to \infty\,.$$

3° Lad nu $f : [1,\infty[\to [0,\infty[$ være givet ved

$$f(x) = \text{ Arctan}(x)\,,$$

og lad μ være det mål der har tæthed x^{-3} med hensyn til Lebesgue målet på $[1,\infty[$. Vis, at

$$\int_1^\infty f_n d\mu \to \frac{\pi}{4}\,,\quad n \to \infty\,.$$