Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet forår 1996

Matematik 2MA 1

Reeksamination 28. marts 1996

4 timers skriftlig prøve med hjælpemidler. (Det er tilladt at medbringe noter, bøger, egne notater o.l. samt lommeregnere.)

Opgave 1

Vi betragter $\mathbb{R}^2$ som metrisk rum med den sædvanlige afstand

$$d(x,y) = \sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2}\,, \quad x=(x_1,x_2)\,,\ y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2\,.$$

For en ret linie L i $\mathbb{R}^2$ defineres afstanden til L som funktionen

$$d_L(x) = \inf\{d(x,y) \mid y\in L\} \quad \text{for} \quad x\in\mathbb{R}^2\,.$$

1° Vis, at $d_L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ er afstandsformindskende, altså at

$$|d_L(x)-d_L(y)| \le d(x,y) \quad \text{for} \quad x,y\in\mathbb{R}^2\,.$$

2° Lad L_1, L_2 være to forskellige ikke parallelle linier i $\mathbb{R}^2$. Tegn mængden

$$\{x\in\mathbb{R}^2 \mid d_{L_1}(x)\le 1\,,\ d_{L_2}(x)\le 1\}$$

og vis, at den er kompakt.

3° Lad der være givet 3 rette linier L_1, L_2, L_3 i $\mathbb{R}^2$ som antages at bestemme en trekant. Med T betegner vi den fulde trekant, dvs. mængden af punkter indenfor eller på trekantens sider.

Lad $\varphi : T \to [0,\infty[$ være defineret ved

$$\varphi(x) = \sum_{i=1}^{3} d_{L_i}(x)\,.$$

Vis, at der findes punkter $a,b\in T$ så

$$\varphi(a)\le\varphi(x)\le\varphi(b) \quad \text{for alle} \quad x\in T\,.$$

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 2

Lad $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være følgen af funktioner defineret ved

$$f_n(x) = 1 - \cos^{2n} x\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

1° Vis, at følgen er monotont voksende med

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0\,, & x \in \pi\mathbb{Z} = \{p\pi \mid p \in \mathbb{Z}\}\,, \\ 1\,, & x \notin \pi\mathbb{Z}\,. \end{cases}$$

2° Lad μ være et vilkårligt mål på det målbare rum $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$.
Vis, at

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = \mu(\mathbb{R} \setminus \pi\mathbb{Z})\,.$$

3° Lad nu μ være det mål, der har tætheden $e^{-|x|}$ med hensyn til Lebesgue målet m på $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$.
Vis, at

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu = 2\,.$$

Opgave 3

Betragt ligningen

$$(*) \qquad F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin(xy)}{1+y^2} f(y) dy\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

1° Vis, at hvis $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ er en begrænset Borel funktion, så er F veldefineret ved $(*)$, og F er en kontinuert funktion.

2° Vis, at hvis $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$, så er F veldefineret ved $(*)$ og en C^2-funktion (to gange differentiabel og F'' er kontinuert).

3° Vis, at hvis $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R})$, så opfylder F defineret ved $(*)$ uligheden

$$|F(x) - F(z)| \le \frac{1}{2}|x - z| \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)| dy \quad \text{for} \quad x, z \in \mathbb{R}\,.$$

(*Vink:* Det kan benyttes at $|\sin x - \sin z| \le |x - z|$ for $x, z \in \mathbb{R}$).

Opgavesættet fortsættes på side 3

Opgave 4

For $a > 0$ betragtes mængden

$$D_a = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | ax^2 \leq y \leq a\}\,.$$

1° Gør rede for at $D_a \in \mathbb{B}_2$ og vis, at $m_2(D_a) = \frac{4}{3}a$.

2° Betragt mængden

$$V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid z \geq 0\,, \quad e^{-z}x^2 \leq y \leq e^{-z}\}\,.$$

Udregn $m_3(V)$.

3° Lad $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ være defineret ved

$$f(x,y,z) = (\sin x) y e^z\,.$$

Vis, at f er integrabel over V og udregn $\int_V f\, dm_3$.