Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet vinteren 1995-96

Matematik 2 MA 1

4 timers skriftlig prøve med hjælpemidler. (Det er tilladt at medbringe noter, bøger, egne notater o.l. samt lommeregnere.)

Opgave 1

Lad (M, d) betegne et metrisk rum.

1° Om en mængde $A \subseteq M$ antages, at den er overdækket af endeligt mange kugler $K(c_i, r_i)$, $i = 1, \cdots, n$, altså $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} K(c_i, r_i)$. Vis, at A er begrænset.

2° Antag, at $A_1, \cdots, A_n$ er begrænsede delmængder af M. Vis, at $A_1 \cup \cdots \cup A_n$ er begrænset.

En mængde $A \subseteq M$ kaldes *totalt begrænset,* hvis den for hvert $\varepsilon > 0$ kan overdækkes med endeligt mange ε-kugler, altså såfremt der gælder

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists n \in \mathbb{N} \, \exists c_1, \cdots, c_n \in M : A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} K(c_i, \varepsilon) \, .$$

3° Vis, at en totalt begrænset mængde A er begrænset.

4° Lad $f : (X, d_X) \to (Y, d_Y)$ være uniformt kontinuert, idet (X, d_X) og (Y, d_Y) er metriske rum. Vis, at hvis $A \subseteq X$ er totalt begrænset, så er $f(A)$ totalt begrænset i (Y, d_Y).

Opgave 2

Lad $f \in \mathcal{L}_2([0, \infty[)$ med hensyn til Lebesgue målet på $[0, \infty[$.

1° Vis, at funktionen $F(x) = \int_0^x f(t)dt$, $x \geq 0$, er veldefineret og kontinuert.

2° Vis ved Cauchy-Schwarz' ulighed, at

$$|F(x)| \leq \sqrt{x} \left(\int_0^x |f(t)|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \, , \; x > 0 \, ,$$

og slut at

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{F(x)}{\sqrt{x}} = 0 \, .$$

Opgave 2 fortsættes på side 2

3° Vis, at der for $0 < a < x$ gælder

$$\left|\frac{F(x)}{\sqrt{x}} - \frac{F(a)}{\sqrt{x}}\right|^2 \leq \left(1 - \frac{a}{x}\right) \int_a^\infty |f(t)|^2 dt \; .$$

4° Vis at $\lim_{a\to\infty} \int_a^\infty |f(t)|^2 dt = 0$, og vis dernæst ved hjælp af uligheden fra 3° at

$$\lim_{x\to\infty} \frac{F(x)}{\sqrt{x}} = 0 \; .$$

Opgave 3

For $\alpha \geq 0$ betragtes funktionen $f_\alpha : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ defineret ved

$$f_\alpha(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin(x^2+y^2)}{(x^2+y^2)^\alpha} & \text{for} \;\; (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{for} \;\; (x,y) = (0,0) \; . \end{cases}$$

1° Idet mængden $\mathbb{D}_+$ er givet ved

$$\mathbb{D}_+ = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1 \,,\; y \geq 0\} \,,$$

skal man vise, at

$$\int_{\mathbb{D}_+} f_\alpha dm_2 = \frac{\pi}{2} \int_0^1 \frac{\sin(u)}{u^\alpha} \, du \; .$$

2° Vis at $f_\alpha \in \mathcal{L}_1(\mathbb{D}_+, m_2)$ hvis og kun hvis $\alpha < 2$.

3° Udregn

$$\int_{\mathbb{D}_+} \sin(x^2+y^2) dm_2(x,y) \; .$$

Opgave 4

Lad mængden $A \subseteq \mathbb{R}^2$ være defineret ved

$$A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y < 1 \,,\; y < x < \frac{1}{y}\} \; .$$

Opgave 4 fortsættes på side 3

1° Skitsér mængden A og bevis at den er åben og kurvesammenhængende.

2° Udregn $m_2(A)$.

3° Lad $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ være givet ved

$$f(x,y) = x^2 y e^{-x}$$

og lad

$$A_1 = \{(x,y) \in A \mid x \geq 1\} \; .$$

Udregn

$$\int_{A_1} f \, dm_2 \; .$$