Københavns Universitet
Eksamen ved Det naturvidenskabelige Fakultet sommeren 1996

Matematik 2 MA

4 timers skriftlig prøve med hjælpemidler. (Det er tilladt at medbringe noter, bøger, egne notater o.l. samt lommeregnere.)

Opgavesættet består af 4 opgaver og er på 2 sider.

Opgave 1

Lad (X, d_X) og (Y, d_Y) betegne metriske rum. En kontinuert funktion $f : X \to Y$ siges at være *egentlig*, hvis det for enhver kompakt delmængde K af Y gælder, at $f^{-1}(K)$ er en kompakt delmængde af X.
Vi udstyrer i det følgende $\mathbb{R}^n$ med den sædvanlige metrik.

a) Lad X være den afsluttede kugle i $\mathbb{R}^n$ med centrum i 0 og radius 1 og antag at $f : X \to \mathbb{R}$ er kontinuert. Vis, at f er egentlig.

b) Antag, at $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ er kontinuert. Vis, at f er egentlig hvis og kun hvis

$$f^{-1}([-m, m])$$

er begrænset for ethvert $m \in \mathbb{N}$.

c) Betragt funktionerne $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, 3$, givet ved

$$f_1(x) = 0\,, \qquad f_2(x) = |x|\,, \qquad f_3(x) = e^x\,.$$

Afgør, hvilke af disse funktioner der er egentlige.

Opgave 2

Sæt

$$E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geq 0\,,\ y \geq 0\,,\ z \geq 0\,,\ x + y \leq e^{-z}\}\,.$$

1° Er E afsluttet? Er E kompakt?

2° Bestem $m_3(E)$.

3° Betragt for et givet $\alpha \in \mathbb{R}$ funktionen $f_\alpha : E \to \mathbb{R}$ givet ved

$$f_\alpha(x, y, z) = \begin{cases} y^\alpha e^{2z}\,, & y \neq 0 \\ 0\,, & y = 0\,. \end{cases}$$

Undersøg, for hvilke α funktionen f_α er integrabel over E mht. Lebesgue målet m_3.

Opgavesættet fortsættes på side 2

Opgave 3

Lad $a \in]0,1[$ og sæt

$$f(z) = \frac{1+z^4}{(1+a^2)z^3 - az^2 - az^4}\,.$$

1° Gør rede for, at f er en meromorf funktion på $\mathbb{C}$. Vis, at polmængden for f er $\{0, a, a^{-1}\}$ og bestem polernes orden.

2° Bestem residuet af f i 0 og a.

3° Begrund, at

$$\oint_{\partial K(0,1)} f(z)\,dz = 2i \int_0^{2\pi} \frac{\cos 2t}{1 - 2a\cos t + a^2}\,dt\,,$$

hvor $\partial K(0,1)$ gennemløbes i positiv omløbsretning.

4° Vis, at

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2t}{1 - 2a\cos t + a^2}\,dt = \frac{2\pi a^2}{1-a^2}\,.$$

Opgave 4

Lad de reelle funktioner f og g være defineret på $\mathbb{R}$, således at

$$f(\theta) = \begin{cases} 0 & \text{for } \; -\pi \le \theta < 0 \\ \sin\theta & \text{for } \; 0 \le \theta < \pi \end{cases}\,, \qquad g(\theta) = \begin{cases} 0 & \text{for } \; -\pi \le \theta < 0 \\ \cos\theta & \text{for } \; 0 \le \theta < \pi \end{cases}\,,$$

og således at f og g er periodiske med periode 2π.

1°) Skitser graferne for f og g i intervallet $[-3\pi, 3\pi]$, beregn de trigonometriske Fourierkoefficienter $c_n(f)$ og $c_n(g)$ for f og g og opskriv de tilhørende Fourierrækker.

2°) Vis, at begge rækker er punktvis konvergente i $\mathbb{R}$, og afgør i begge tilfælde, hvorvidt de er uniformt konvergente i $\mathbb{R}$.

3°) Find summen af Fourierrækken for g i $\theta = -\pi$.